

## WALT DISNEY, I PITAGORICI E LA MATEMATICA

ANDREA SANI

*Società Filosofica Italiana e Liceo Classico Galileo, Firenze*

### 1. Matematica, filosofia e cinema

Può un film a disegni animati introdurre ad alcuni temi significativi di matematica e persino di filosofia della matematica? La risposta è positiva. Il film in questione è, in realtà, un “mediometraggio” disneyano, a disegni animati, di 27 minuti: *Paperino nel mondo della matematica* (*Donald in Mathmagicland*, 1959), con la regia di Hamilton Luske.

*Donald in Mathmagicland* permette di accennare in modo divertente ad argomenti scientifici e anche a un classico problema di natura filosofica che riguarda il rapporto fra la matematica e il mondo reale. Per questo motivo il mediometraggio disneyano è utilmente valorizzabile a scopo didattico. Il cinema ha infatti un forte potere di coinvolgimento: fa vivere situazioni e dà concretezza sensibile a pensieri e a concetti. Anche i disegni animati possono svolgere questa funzione, come ebbe a dire Walt Disney (1901-1966), riferendosi proprio a *Donald in Mathmagicland*:

Il disegno animato è un ottimo mezzo per stimolare l'interesse. Di recente, abbiamo spiegato la matematica in un film e in quel modo abbiamo suscitato l'interesse del pubblico per questa tematica importantissima<sup>1</sup>.

E a proposito della filosofia, Julio Cabrera, autore del celebre libro *Da Aristotele a Spielberg. Capire la filosofia attraverso i film* (2000), ha affermato:

Dal punto di vista di una concezione filosofica del cinema, l'elemento 'evasione' non va assolutamente escluso, in quanto direttamente vincolato all'impatto sensibile [...]; abitualmente invece lo si esclude in quanto 'svierebbe' da ciò che un film filosoficamente si proporrebbe di dimostrare. [...] Non sarà necessario, quindi, cercare la filosofia solo nei film di Andrej Arsen'evic Tarkovskij o di Ingmar Bergman; essa è presente – perché no? – anche nella *Carica dei 101*<sup>2</sup>.

Naturalmente, il ricorso al cinema è efficace come *punto di partenza* per suscitare l'attenzione su determinate questioni, che poi vanno comunque trattate con i metodi tradizionali della didattica.

<sup>1</sup> [10], p. 198.

<sup>2</sup> [3], p. 28. Cabrera si riferisce al disegno animato disneyano *101 Dalmatians*, diretto da Clyde Geronimi, Hamilton Luske e Wolfgang Reitherman nel 1961.

## 2. *Donald in Mathmagicland*

*Donald in Mathmagicland* risale al 1959 e si avvale della consulenza del fisico, matematico e divulgatore scientifico, Heinz Haber (1913-1990). Del disegno animato diretto da Luske esiste anche una versione a fumetti (1959), sceneggiata da Don Christensen e disegnata da Tony Strobl. In Italia, la storia a fumetti è apparsa per la prima volta su “Topolino”, n. 233 del 1960, con il titolo *Paperino nel regno della matematica*. L'ultima ristampa è su “Zio Paperone”, n. 162 del 2003, rititolata *Paperino nel paese della matematica*.

Il mediometraggio a disegni animati si inserisce in una serie di film disneyani a carattere educativo iniziata durante la Seconda Guerra Mondiale, allorché gli Studi Disney cominciano a lavorare per le forze armate e per il governo. Nel 1942, Paperino è protagonista di un cortometraggio intitolato *The New Spirit (Assistant Director Louis Debny, animazione di Ed Aardal)*, nel quale il papero disneyano è messo a disposizione del Ministero del Tesoro per convincere gli americani a pagare le tasse per sostenere lo sforzo bellico contro il Giappone e contro la Germania nazista. Il disegno animato è diffuso in tutto il Paese e viene visto da circa 60 milioni di persone: secondo un sondaggio Gallup, influenza positivamente le intenzioni del 37% dei contribuenti statunitensi.

Nel 1943, sempre Paperino collabora con il governo degli Stati Uniti attraverso il cortometraggio *La faccia del Führer (Der Fuehrer's Face, regia di Jack Kinney)*, una pungente satira del nazismo che ottiene l'Oscar nello stesso anno<sup>3</sup>. Nel dopoguerra, il filone educativo disneyano annovera *How To Have An Accident In The Home* (1956) e *How To Have An Accident At Work* (1959), diretti entrambi da Charles A. Nichols, dove Paperino propaga la sicurezza in casa e sul posto di lavoro, rappresentando i vari comportamenti sbagliati da evitare. Del 1961 è *Paperino e la ruota (Donald Duck and the Wheel, con la regia di Hamilton Luske)*, in cui Donald Duck incontra lo “Spirito del Progresso” che lo trasporta nella preistoria e gli fa inventare la ruota. Ma il più celebre disegno animato del filone *educational* risulta, appunto, *Paperino nel mondo della matematica*, dove il personaggio disneyano scopre la presenza di principi matematici nella natura, nell'arte e in molti giochi come il biliardo e gli scacchi.

In *Donald in Mathmagicland* l'esploratore Paperino penetra in una regione fantastica, simile al mondo fiabesco già descritto da Hamilton Luske (insieme agli altri registi Clyde Geronimi e Wilfred Jackson) nel lungometraggio disneyano *Alice nel Paese delle Meraviglie (Alice in Wonderland)* del 1951, ispirato all'omonimo capolavoro di Lewis Carroll. In questa dimensione psichedelica, gli alberi hanno le foglie a forma di numero e possiedono “radici quadrate”, mentre nei corsi d'acqua scorrono simboli e cifre,

<sup>3</sup> Paperino ha un incubo e sogna di trovarsi in un villaggio della Germania nazista, dove lavora a una catena di montaggio, avvitando le spolette delle granate per l'artiglieria. Nel cortometraggio fa anche una fulminante apparizione una banda musicale con l'imperatore giapponese Hirohito al basso tuba, Benito Mussolini alla grancassa, Hermann Göring all'ottavino e Rudolf Hess come voce solista.

a dimostrazione che il mondo naturale è matematizzabile. Il mediometraggio alterna sequenze animate a sequenze *live action*, sul modello dei film disneyani a “tecnica mista” *Saludos Amigos* (id., 1943) e *I tre Caballeros* (*The Three Caballeros*, 1945), entrambi diretti da Norman Ferguson, Clyde Geronimi, Jack Kinney e Bill Roberts.

All’inizio di *Donald in Mathmagicland*, Paperino dichiara di disprezzare la matematica, che considera una materia per “sgobboni”, ma viene indotto a cambiare idea sull’argomento dallo “Spirito d’Avventura”, che lo trasferisce magicamente nell’antica Grecia, all’epoca di Pitagora, tra VI e V secolo a. C. Paperino è ammesso nella scuola del filosofo e matematico greco e apprende i segreti dei Pitagorici<sup>4</sup>.

### 3. Pitagora e i Pitagorici

“Pitagora – racconta lo Spirito d’Avventura – comunicava regolarmente le sue scoperte ai colleghi di una confraternita di sgobboni che si chiamavano appunto ‘Pitagorici’. Si riunivano in segreto per discutere le loro scoperte matematiche. Solo gli iniziati erano ammessi”. Quello che si narra nel mediometraggio disneyano corrisponde a ciò che sappiamo dalle fonti.

In effetti, Pitagora (570 - 497/96 a. C.), dopo aver lasciato a circa quarant’anni la città natale di Samo per sfuggire alla tirannide di Policrate (574 - 522 a. C.) e aver viaggiato in Oriente, si ferma a Crotona, nella Magna Grecia, ove fonda una scuola. Scuole simili si diffondono in tutta la Magna Grecia, da Reggio Calabria a Taranto, e anche in Beozia, a Tebe.

La scuola pitagorica è contemporaneamente un’associazione religiosa, politica e filosofica. Pitagora è ritenuto il depositario di un sapere trasmessogli direttamente da Apollo, e i suoi discepoli non possono discutere questa sua sapienza né modificarla: devono rimanere fedeli alla sua dottrina, tanto che a Pitagora è riferito il celebre *autòs efe* (*ipse dixit*). I Pitagorici sono inoltre tenuti a mantenere il segreto e l’insegnamento è impartito per gradi, come avviene per l’iniziazione ai misteri in ambito religioso. Secondo la testimonianza del filosofo neoplatonico Giamblico (245-325), gli allievi sono divisi in “acusmatici”, semplici “ascoltatori” costretti al silenzio, e “matematici”, che possono fare domande ed esprimere opinioni e ai quali sono trasmessi gli insegnamenti più profondi.

Anche se si dice che sia stato Pitagora a coniare la parola “filosofia” (= “amore per la sapienza”) e “matematica” (= “ciò che è insegnato”), una sola concezione può essere attribuita sicuramente al fondatore della scuola (che molto probabilmente non ha scritto nulla): la teoria religiosa della metempsicosi, secondo la quale l’anima sopravvive dopo la morte e trasmigra di corpo in corpo, cioè in altri esseri viventi (animali compresi). L’incarnazione di un uomo nel corpo di un animale è considerata una conseguenza delle colpe commesse nella vita precedente, secondo i canoni della religione orfica. Infatti, i Pitagorici non sono seguaci della religione olimpica (quella che conosciamo

4 Su Paperino nel regno della matematica e più in generale sul rapporto tra cinema e matematica, cfr. [8].

attraverso i poemi omerici e le tragedie greche e che ritiene l'Olimpo la sede degli dei), ma dell'orfismo, una setta filosofico-religiosa fondata dal mitico poeta trace Orfeo che considera la vita terrena come una preparazione per una vita più alta dopo la morte. Tale vita può essere meritata per mezzo di cerimonie e riti purificatori. L'anima di chi non riesce a purificarsi, è invece destinata a reincarnarsi.

Secondo i Pitagorici, per purificarsi sono necessari una disciplina dei piaceri e dei desideri e il rispetto di alcuni divieti. I Pitagorici non consumano carni, per riguardo nei confronti dell'anima umana che può essere incarnata negli animali, e nella setta vige la strana proibizione di mangiare le fave. Le regole dei Pitagorici hanno probabilmente un significato simbolico, che però ci resta oscuro. Fra queste, si ricordano le massime di non attizzare il fuoco con il ferro, di non spezzare il pane, di non far nidificare le rondini sotto il tetto, di non lasciare l'impronta del corpo sul letto, né quella della pentola sulle ceneri.

Sappiamo, inoltre, che politicamente, i seguaci di Pitagora appoggiano i governi aristocratici delle loro città nella Magna Grecia. Quanto alla loro dottrina più specificamente matematico-filosofica, le fonti sembrano avvalorare l'ipotesi che per i Pitagorici l'*archè*, cioè il principio delle cose, sia costituito dai *numeri*.

Nel mediometraggio disneyano, frequentando i Pitagorici, Paperino scopre, appunto, che la realtà è fatta di numeri, dato che tutto, in natura, si svolge con ordine e secondo regole matematiche. Stando alla testimonianza di Aristotele, per i Pitagorici i numeri sono addirittura "le cose stesse": *auta ta pragmata*<sup>5</sup>.

#### 4. La metafisica del numero

L'argomentazione che può aver condotto i seguaci di Pitagora a sostenere che "le cose sono numeri" è forse la seguente: di fatto, ogni cosa possiede una sua figura geometrica; ma ogni figura geometrica è formata di piani; i piani, a loro volta, sono formati di linee, e le linee sono composte di punti (che i primi Pitagorici concepiscono come dotati di dimensioni, sebbene molto piccole). Se si tiene presente che i punti vengono identificati con i numeri, si capisce allora quello che vogliono dire i discepoli di Pitagora, quando affermano che alla base delle cose ci sono i numeri. "Le cose sono numeri" perché gli oggetti, in realtà, sono gruppi di punti (cioè di corpuscoli), distribuiti secondo un preciso ordine geometrico.

Evidentemente, i primi Pitagorici non pensano che i numeri siano entità astratte, oggetti logici, ma li reputano enti concreti: il numero uno è designato con un punto spaziale e i numeri successivi con altrettanti punti disposti nello spazio, in modo da costituire determinate figure geometriche. Di conseguenza, nasce la cosiddetta "aritmo-geometria": l'aritmetica, o scienza delle unità che compongono i numeri interi, coincide di fatto con la geometria, o scienza dei punti. Ancora oggi, d'altra parte, i numeri vengono raffigurati con i punti sui dadi da gioco. I Pitagorici – in particolare un certo Eurito, discepolo di Filolao – simboleggiano i numeri così concepiti con dei sassolini,

<sup>5</sup> Aristotele, *Metafisica*, 987b 27-9.

ed eseguono le operazioni aritmetiche con un'opportuna disposizione di ciottoli (da questo uso è derivato il termine latino *calculus*, "calcolo", che significa, appunto "pietruzza"). Per i primi Pitagorici, dunque, i numeri, oltre a possedere un carattere aritmetico (sono un insieme di unità) e geometrico (sono un insieme di punti), hanno anche un carattere reale (sono una sorta di atomi fisici o *mònadi*).

La scelta pitagorica del numero come principio di tutte le cose è motivata anche dall'osservazione dei fenomeni astronomici e musicali. In ambito astronomico, i Pitagorici sanno che le posizioni successive degli astri nel cielo ricorrono identiche dopo un determinato periodo di tempo, prevedibile con il calcolo. Quanto ai fenomeni musicali, nel mediometraggio disneyano lo Spirito d'Avventura ricorda a Paperino che le consonanze, e cioè i suoni armoniosi e piacevoli, si ottengono quando le note prodotte dalle corde di una lira hanno delle lunghezze i cui rapporti corrispondono a quelli dei primi numeri interi. In particolare, i seguaci di Pitagora si accorgono che le tre consonanze principali, l'ottava, la quinta e la quarta, si possono esprimere mediante rapporti numerici rispettivamente di due a uno, tre a due, quattro a tre.

I tre rapporti sono fondamentali perché compaiono nel numero 10 (ritenuto sacro), che è la somma, appunto, di 4, 3, 2, 1. Il numero 10 è rappresentabile nel cosiddetto "triangolo quaternario", che simboleggia le quattro forme geometriche (cfr. Fig. 1), risultando dalla somma di 1 punto + 2 punti (che danno luogo a una linea) + 3 punti (che danno luogo a una superficie, dato che 3 punti non allineati determinano un triangolo esteso su due dimensioni) + 4 punti (che danno luogo a un solido, giacché 4 punti non allineati determinano un tetraedro, cioè una piramide con quattro facce triangolari, il cui volume si estende in tre dimensioni):

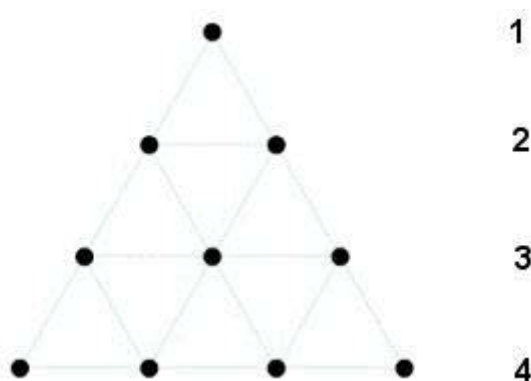


Figura 1.

Anche la cosiddetta "tavola pitagorica", essendo basata sul sistema decimale, si impenna sul numero sacro 10. Ai Pitagorici sono attribuite molte scoperte, fra le quali il famoso teorema relativo al triangolo rettangolo (detto, appunto "teorema di Pitagora"), che afferma l'uguaglianza tra l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa e la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti, e il teorema secondo cui la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli retti.

Il grande interesse dei Pitagorici per la matematica contribuisce a far nascere in loro la convinzione che sia possibile spiegare in termini numerici *tutti* gli aspetti dell'universo: non solo i fenomeni del mondo naturale, ma anche quelli del mondo umano, compresi i sentimenti, le passioni, e persino le nozioni astratte come la giustizia o la salute. La giustizia, in particolare, che opera divisioni in parti uguali o fa corrispondere la pena all'offesa, per i Pitagorici coincide con il numero 4 (secondo altri con il 9), in quanto tale numero si divide appunto in due parti uguali e risulta il prodotto di queste stesse quantità<sup>6</sup>.

### 5. Numeri pari e numeri dispari

Abbandoniamo per un momento *Paperino nel mondo della matematica* e cerchiamo di approfondire la concezione pitagorica della matematica.

I numeri vengono suddivisi dai seguaci di Pitagora in pari e dispari. Questi ultimi sono calcolati dal tre in poi, giacché l'uno, secondo i Pitagorici, è concepito come "parimpari", avendo in sé sia la natura del pari, sia quella del dispari, in quanto sorgente di tutti i numeri.

Come testimonia Aristotele nel primo libro della *Metafisica* (1, 5, 986a), alcuni Pitagorici pongono il pari in relazione con l'infinito, e il dispari col finito. Altri Pitagorici (di cui non sono specificati i nomi) fanno corrispondere alle coppie infinito-finito, pari-dispari, altre antitesi. Le opposizioni pitagoriche (dieci in tutto) sono le seguenti:

finito	infinito
dispari	pari
uno	molteplice
destro	sinistro
maschio	femmina
immobile	in moto
diritto	curvo
luce	tenebre
buono	cattivo
quadrato	rettangolo

Il motivo per cui i Pitagorici associano il pari all'infinito e il dispari al finito, non è chiarissimo. Alcuni interpreti fanno l'ipotesi che i Pitagorici rappresentino geometricamente i numeri pari come coppie di punti che danno luogo a una serie 'aperta', cioè, che può essere proseguita all'infinito, e i numeri dispari come coppie di punti con un punto isolato che chiude la serie. In tal modo, i numeri pari risultano illimitati, mentre i numeri dispari danno l'idea di ciò che è delimitato e compiuto (Fig. 2).

<sup>6</sup> [4], p. 108.

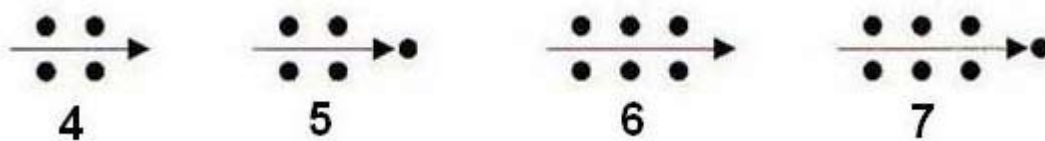


Figura 2.

Altri commentatori, invece, ritengono che la corrispondenza pari-illimitato, dispari-limitato vada collegata con l'uso di disporre i punti-unità a *gnomone*, cioè a squadra (lo gnomone è l'orologio solare babilonese). Infatti, se si dispongono a squadra, attorno all'unità, i punti costituenti i numeri dispari, si ottengono dei quadrati (Fig. 3).

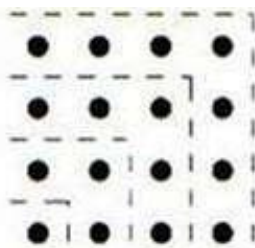


Figura 3.

Invece, se si dispongono a squadra, attorno alla diade (costituita da due punti), i numeri pari, si ottengono dei rettangoli (Fig. 4).

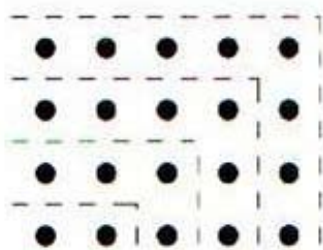


Figura 4.

Dunque, sommando i successivi numeri dispari, si ottiene sempre *una* sola forma: quella del quadrato, espressa, appunto da “numeri quadrati”<sup>7</sup>:

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

Invece, sommando i successivi numeri pari, si ottengono *infinite* forme rettangolari diverse, dato che questi rettangoli non sono simili fra loro<sup>8</sup>:

<sup>7</sup> I numeri quadrati successivi sono formati dalla sequenza:  $1 + 3 + 5 + 7 \dots + (2n - 1)$

<sup>8</sup> I numeri rettangolari successivi sono formati dalla sequenza:  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$

$$2 + 4 = 6 = 2 \cdot 3$$

$$2 + 4 + 6 = 12 = 3 \cdot 4$$

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \cdot 5$$

Di conseguenza, al dispari corrispondono il quadrato, l'uno (una sola forma), il finito, mentre al pari corrispondono il rettangolo, il molteplice (molte forme), l'infinito (infinite forme).

## 6. La concezione di Filolao

Se si scorre la lista dei contrari riportata sopra, ci si accorge inoltre che il bene si riconduce al finito, mentre il male all'infinito. Nell'elenco non viene inserita l'antitesi "vero-falso", giacché le coppie sono già dieci e dieci, per i Pitagorici, è il numero perfetto. Ma Filolao (seconda metà del V sec. a. C.), uno degli esponenti di maggior rilievo del pitagorismo, metterà anche l'errore dalla parte dell'illimitato. I Pitagorici, dunque, riportano all'infinito (all'incalcolabile, all'incomprensibile) i valori negativi, e al finito (al calcolabile, al comprensibile) quelli positivi, dimostrando così la loro diffidenza – tipica della mentalità greca – nei confronti dell'*apeiron*. Il fatto è che il bene e la verità hanno una definizione precisa, mentre il male e l'errore no. Per esempio, di un problema matematico esiste una sola soluzione esatta e infinite soluzioni sbagliate. Inoltre, di fronte a una certa situazione, esiste un solo modo di comportarsi bene e infiniti modi di comportarsi male. L'infinito appare ai Greci non come "ciò che è illimitato", ossia privo di limiti e quindi perfetto, ma, al contrario, come ciò che "non è finito", cioè come qualcosa di incompiuto e di imperfetto. L'infinito è identificato con ciò che non ha forma, non solo nel senso spaziale, ma anche nel senso che manca di ogni struttura. Il finito, invece, essendo determinato e compiuto, è perfetto<sup>9</sup>.

I Pitagorici, con Filolao, elaborano anche una concezione dell'universo. L'universo è per loro delimitato da una sfera, il Cielo, in cui sono infisse le stelle. Al centro dell'universo c'è il Fuoco sacro, generatore di tutte le cose. Attorno al Fuoco centrale girano l'Antiterra, la Terra, la Luna, il Sole, i cinque pianeti allora conosciuti (Mercurio, Venere, Marte, Giove, Saturno) e il Cielo delle stelle fisse. L'Antiterra è un pianeta inventato dai Pitagorici per completare il numero perfetto di 10. L'Antiterra non è visibile perché gli uomini vivono nell'emisfero della Terra che è rivolto verso le orbite esterne della Luna, del Sole e degli altri pianeti. Secondo i Pitagorici, il Sole, che è una sorta di grande cristallo, accoglie il riflesso del Fuoco centrale e lo rinvia sulla Terra sotto forma di luce e calore.

I pianeti, ruotando, emettono ciascuno un suono continuo, che dev'essere una musica armonica come il loro movimento regolare. Sulla Terra, infatti, ogni corpo emette un suono quando si muove; altrettanto faranno i corpi celesti più grandi e più veloci di quelli terrestri (cfr. Aristotele, *De Caelo*, 290b). Noi non sentiamo questo suono perché lo udiamo da sempre e ci siamo assuefatti. Per questo suono, infatti, accade quel che

<sup>9</sup> Sull'argomento, cfr. [9]



succede ai fabbri, che, per l'abitudine fatta al rumore, non lo distinguono più. La Terra, dunque, per i Pitagorici si muove: ha un moto di rivoluzione intorno al Fuoco. E non è al centro dell'universo (perché al centro c'è il Fuoco). Quello dei Pitagorici è un modello dell'universo simile (anche se non eliocentrico) a quello di Copernico.

### 7. La sezione aurea

Ritorniamo ora a Paperino e al mondo della matematica. Dopo aver partecipato a una *jam session* con i Pitagorici, *Paperino* stringe la mano a Pitagora in persona e si ritrova, inciso sul palmo della mano, il pentagramma, ossia la stella a cinque punte che, secondo lo scrittore e retore greco Luciano del II secolo d.C. (cfr. *Dell'errore nel salutare*), è il simbolo della società segreta dei Pitagorici. Questa figura geometrica si ottiene inserendo le diagonali in un pentagono regolare (Fig. 5). Lo Spirito d'Avventura mostra quindi a Paperino come nel pentagramma compaia la famosa "sezione aurea" di un segmento. Ricordiamo che il termine "sezione aurea" sarà introdotto solo nel XIX secolo da Martin Ohm (1835), e che, nel III secolo a. C., Euclide, negli *Elementi*, parla di "proporzione estrema e media", mentre Luca Pacioli, nel 1509, di "divina proporzione".

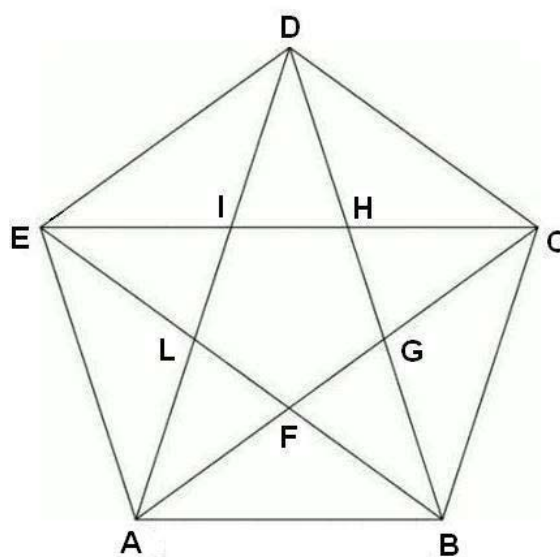


Figura 5.

Effettivamente, in un pentagono regolare  $ABCDE$ , ciascun punto d'intersezione delle diagonali divide ogni diagonale in due segmenti disuguali, tale che il rapporto dell'intera diagonale (per esempio  $AC$ ) al segmento maggiore ( $AG$ ) è uguale al rapporto di quest'ultimo al segmento minore ( $GC$ ). In geometria, si chiama appunto "sezione aurea" la parte di un segmento che è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente (nel pentagono regolare anche il lato è la sezione aurea della diagonale). In particolare, dato un segmento  $AC$  (Fig. 6), si dice che il segmento  $AB$  è la sezione aurea di  $AC$  se vale la seguente proporzione:

$$AC : AB = AB : BC$$



Figura 6.

La definizione della sezione aurea è effettivamente fissata dalla scuola pitagorica. Secondo una testimonianza di Giamblico (*in Nicom.* 100, 19-25), il rapporto aureo è scoperto dal pitagorico Ippaso di Metaponto (fine del VI - inizi del V secolo)<sup>10</sup>, che associa a esso il concetto di incommensurabilità (cfr. più avanti). Invece, il primo calcolo decimale noto della sezione aurea è effettuato dall'astronomo e matematico tedesco Michael Maestlin (1550-1631), insegnante di Keplero.

Nella Fig. 6, se si assume che  $AC$  sia uguale a 1, non è difficile dimostrare che il rapporto (detto "aureo") fra la misura della sezione aurea  $AB$  del segmento e la misura del segmento stesso è:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

che è circa 0,618 (per dare solo i primi tre decimali). Questo numero "irrazionale" (cioè decimale illimitato non periodico e quindi non esprimibile come quoziente di interi) è indicato con la lettera minuscola  $\varphi$ , dall'iniziale del grande scultore Fidia (490 a.C. circa - 430 a.C. circa), che applica ripetutamente il rapporto aureo nelle sue opere. Talvolta è usata la maiuscola  $\Phi$  per denotare il reciproco del numero suddetto, cioè:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

che è circa 1,618<sup>11</sup>.

<sup>10</sup> [4], p. 84.

<sup>11</sup> Al numero irrazionale 1,618... è legata anche la successione numerica formulata dal matematico pisano Leonardo Fibonacci (1170-1250). L'uso della cosiddetta "successione di Fibonacci" risale all'anno 1202. Essa si compone della seguente successione di numeri:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

Ogni termine successivo della successione (dal terzo in poi) è uguale alla somma dei due numeri immediatamente precedenti. Nel 1611 Keplero scoprì che, procedendo lungo la successione, il rapporto tra un termine e il suo precedente oscilla (in eccesso o in difetto) intorno a 1,618..., al quale si avvicina sempre di più.

Lo Spirito d'Avventura mostra a *Paperino* anche il “rettangolo aureo” (Fig. 7), cioè un rettangolo  $ABCD$  le cui proporzioni sono basate sul rapporto aureo. Ciò significa che il lato minore (per esempio  $AD$ ) è la sezione aurea del lato maggiore ( $AB$ ).

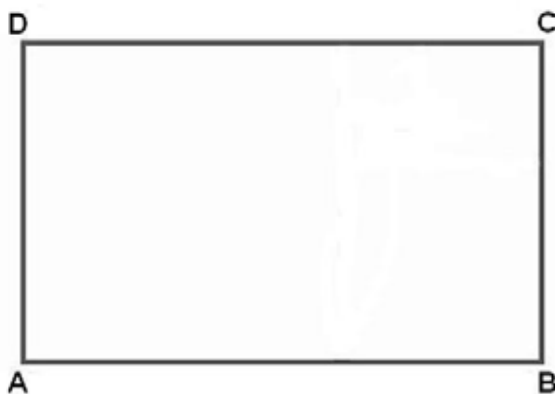


Figura 7.

Sempre lo Spirito d'Avventura spiega a *Paperino* che se, all'interno di un rettangolo aureo, disegniamo un quadrato con il lato uguale al lato minore del rettangolo, il rettangolo-differenza sarà anch'esso un rettangolo aureo. E si può ripetere l'operazione all'infinito, ottenendo rettangoli aurei sempre più piccoli (Fig. 8).

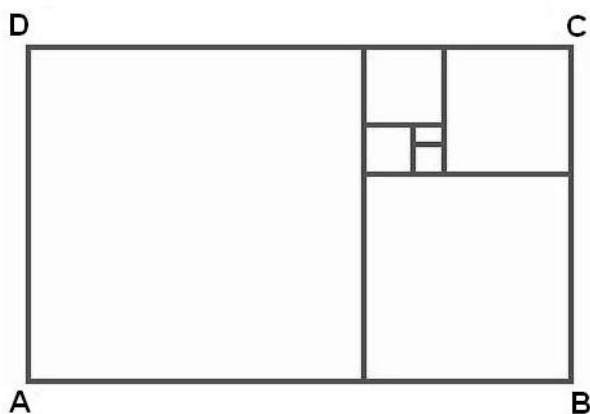


Figura 8.

Dalla proprietà del rettangolo aureo di potersi “rigenerare” infinite volte, deriva la possibilità di creare al suo interno una successione infinita di rettangoli aurei e di quadrati. Tracciando all'interno di ciascun quadrato un arco di cerchio, avente per raggio il lato del quadrato stesso, otteniamo una curva che approssima la cosiddetta “spirale logaritmica”, ammirevole per le sue caratteristiche matematiche ed estetiche (Fig. 9).

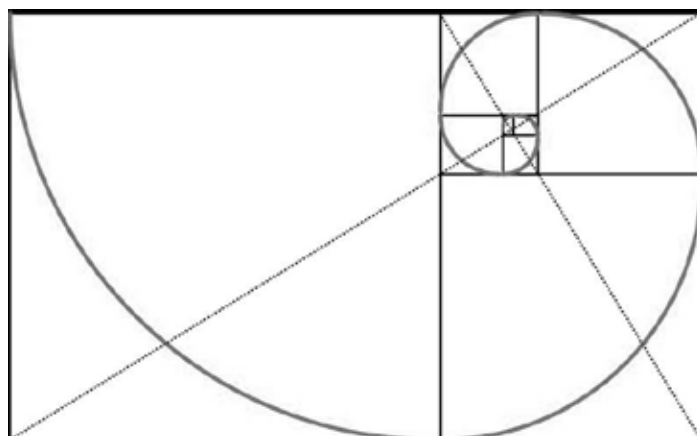


Figura 9.

### 8. Arte e sezione aurea

Lo Spirito d'Avventura rivela a *Paperino* che il concetto di sezione aurea è utilizzato ampiamente nell'arte greca e poi nel Rinascimento: il rettangolo aureo è ritenuto tradizionalmente il principio matematico della bellezza, e appare nella facciata del Partenone<sup>12</sup> e nella cattedrale di Notre-Dame, ma anche in quadri famosi come *La Gioconda* di Leonardo da Vinci e persino nel palazzo delle Nazioni Unite a New York.

Un esempio molto evidente (non citato nel disegno animato disneyano) di uso artistico della sezione aurea è un dipinto di Piero della Francesca, pittore che dimostra un'attenzione fuori dal comune per la matematica: *La flagellazione di Cristo* (1444-1470). Il dipinto è diviso in due scene distinte, una quadrata e una rettangolare, che mostrano in modo esplicito le proporzioni del rettangolo aureo.

In effetti, numerosi autori ritengono che il nostro apparato percettivo manifesti una naturale preferenza verso le proporzioni che risultano in accordo con la sezione aurea, e che questo rapporto ci appaia esteticamente piacevole<sup>13</sup>. Secondo quest'interpretazione, il rettangolo aureo ci sembra il più "bello" rispetto all'infinita varietà di tutti i rettangoli possibili.

Il rapporto aureo, in virtù del quale una parte è in proporzione armoniosa con il tutto, è riscontrabile in natura, come ci attestano la fisica, la biologia, la botanica, la zoologia, la mineralogia e la chimica. Rispettano la sezione aurea gli organismi dei mammiferi, dei pesci, degli uccelli e delle farfalle e il corpo umano, quando le sue

<sup>12</sup> La presenza del rapporto aureo nel Partenone è comunque controversa. Cfr. [7], p. 114.

<sup>13</sup> Tuttavia, altri studiosi, pur riconoscendo il frequente utilizzo del rapporto aureo nell'arte, non ritengono che esso sia da considerarsi un'immutabile norma estetica, ed escludono che esista un canone di bellezza ideale (cfr. [7], p. 296). Fra i numerosi esempi di opere d'arte contemporanea ispirate alla sezione aurea si può citare anche il quadro *Il sacramento dell'Ultima Cena* (1955) di Salvador Dalí (1904-1989), le cui dimensioni sono quelle di un rettangolo aureo, e in cui altri rettangoli aurei compaiono nella disposizione delle figure. Inoltre, la tavola è sovrastata da un grande dodecaedro, le cui facce pentagonali ci riportano sempre alla sezione aurea.

proporzioni sono perfette (ma non è il caso del corpo di *Paperino*, che, in *Donald in Mathmagicaland*, cerca vanamente di incastrarsi in un rettangolo aureo!). Per esempio, nella *Nascita di Venere* (1482-85) di Sandro Botticelli, l'altezza da terra dell'ombelico della Venere è la sezione aurea della sua altezza complessiva.

Gli esempi più evidenti di rapporto aureo citati nel mediometraggio disneyano sono quelli della stella di mare, che è una stella a cinque punte, o della conchiglia del Nautilus, che è una spirale logaritmica. Spirali logaritmiche sono formate dagli stami di una margherita o di un girasole. E i tronchi, i rami e le foglie delle piante crescono e sono disposti secondo il rapporto aureo, dato che, con questo ordine, godono della migliore insolazione<sup>14</sup>.

Tale armonia è presente nel microcosmo come nel macrocosmo, negli esseri infinitamente piccoli e negli enormi corpi celesti. Oggi sappiamo che la molecola del Dna, la celebre doppia elica, alterna un solco grande e un solco piccolo. Il rapporto tra le loro lunghezze è, appunto, il rapporto aureo. Analogamente, su scala cosmica, i bracci a spirale della Via lattea e di altre galassie sono riconducibili allo stesso schema. Viene da pensare che la sezione aurea sia la sigla che il Creatore ha posto nel mondo naturale<sup>15</sup>.

Così, lo Spirito d'Avventura può concludere il suo discorso a *Paperino* sull'importanza della matematica con queste parole, di stampo filosofico, attribuite a Galileo Galilei: "La matematica è l'alfabeto nel quale Dio ha scritto l'universo". Secondo questa concezione, la matematica, e in particolare la geometria, costituisce la trama e l'ordito del mondo.

Effettivamente, anche per Galileo, la vera scienza della natura è la meccanica geometrica perché, a giudizio del grande scienziato pisano, il mondo in sé è 'ontologicamente' geometrico. In un celebre passo del *Saggiatore* (1623), Galileo sostiene, appunto, che il libro dell'universo "è scritto in una lingua matematica, e i suoi caratteri sono cerchi, triangoli, e altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto"<sup>16</sup>. La "fattura" reale del mondo è di tipo geometrico, per cui solo chi conosce il linguaggio matematico risulta in grado di decifrarla. In questo senso, Galileo si proclama "pitagorico".

14 I quozienti di fillotassi (cioè della disposizione delle foglie) si possono esprimere come quozienti dei numeri di Fibonacci (cfr. nota 11). Ricordiamo che fra le spirali logaritmiche potremmo citare anche i vortici degli uragani e il volo del falco pellegrino quando cala sulla sua preda.

15 Cfr. sull'argomento l'opinione espressa da Vittorio Messori in un articolo pubblicato sul "Corriere della sera" del 28 dicembre 2009 (*Il segreto dell'armonia. Quel numero divino che scorre nel sangue*): "Bisogna guardarsi, certo, da forzature apologetiche e riconoscere che non tutto, nella natura, è misura e armonia. L'ordine sembra convivere con il disordine, almeno apparente. Ma c'è da capire coloro che, dai tempi pagani sino a oggi – in ambienti non solo cristiani ma anche ebraici, musulmani, buddisti, non dimenticando la tradizione delle Logge – dicono di scorgere nella 'sezione aurea' le impronte digitali del Deus absconditus, del Dio che si cela e al contempo si rivela, lasciando tracce, indizi, segnali della Sua creazione". Sul rapporto fra la sezione aurea, l'arte e la biologia, cfr. anche M. Piattelli Palmarini, *Così occhio e mente colgono la bellezza*, in "Corriere della sera", martedì 12 gennaio, 2010.

16 [6], vol. VI, p. 232.

### 9. La scoperta delle grandezze incommensurabili

Abbiamo già fatto notare che il numero che esprime il rapporto fra la sezione aurea di un segmento e il segmento stesso è un numero “irrazionale”, e cioè  $0,618\dots$ . In effetti, il segmento e la sezione aurea sono grandezze “incommensurabili” ed è importante rilevare che la scoperta di grandezze di questo tipo, effettuata dai Pitagorici, contraddice l’originaria concezione dei numeri sostenuta dai primi aderenti della setta, secondo i quali le figure geometriche sarebbero composte da un numero *finito* di punti, piccolissimi, ma non privi di dimensioni (a tale concezione abbiamo fatto riferimento nel precedente § 4).

Come abbiamo visto, i primi Pitagorici concepiscono il punto come una sorta di granellino di sabbia, e i segmenti come un insieme finito di questi granellini, posti a contatto l’uno di seguito all’altro. Tale ingenua concezione entra appunto in crisi allorché i Pitagorici scoprono l’esistenza di grandezze incommensurabili. Vediamo dunque di chiarire, in termini generali, in che cosa consista il problema.

Due segmenti  $AB$  e  $CD$  si dicono commensurabili quando esiste un segmento  $EF$  contenuto  $m$  volte in  $AB$  e  $n$  volte in  $CD$ , dove  $m$  e  $n$  sono numeri interi (Fig. 10). In altre parole,  $AB$  e  $CD$  sono commensurabili se ammettono un sottomultiplo in comune.

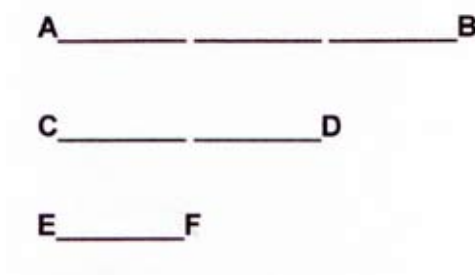


Figura 10.

Invece, due segmenti si chiamano incommensurabili quando non esiste una siffatta misura comune. Il rapporto fra due grandezze incommensurabili non può quindi essere espresso da un numero razionale, rappresentato da una frazione  $m/n$ , con  $m$  e  $n$  numeri interi. Sono grandezze incommensurabili la sezione aurea di un segmento e il segmento stesso, così come la diagonale ( $AC$ ) e il lato ( $AB$ ) di un quadrato  $ABCD$  (Fig. 11).

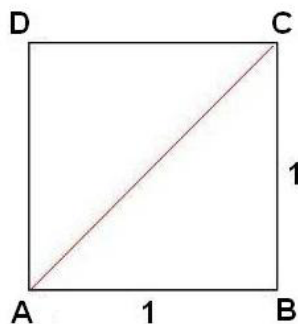


Figura 11.

Come e quando i matematici greci giungano a scoprire l'esistenza di grandezze incommensurabili è molto incerto. Secondo Aristotele, i Pitagorici sarebbero arrivati a tale scoperta dimostrando per assurdo che se la diagonale e il lato di un quadrato (l'ipotenusa e il cateto di un triangolo rettangolo isoscele) fossero commensurabili, allora un numero risulterebbe contemporaneamente pari e dispari.

Una prova di questo tipo, ad esempio, – scrive Aristotele – è quella che stabilisce l'incommensurabilità della diagonale, fondandosi sul fatto che quando viene supposta la sua commensurabilità, i numeri dispari risultano uguali a quelli pari<sup>17</sup>.

La prova è fondata su una *reductio ad absurdum* e può essere ricostruita nel seguente modo, seguendo quanto afferma Euclide in uno scolio del X libro dei suoi *Elementi*.

Supponiamo, per assurdo, che il rapporto fra la diagonale  $d$  e il lato  $l$  di un quadrato  $ABCD$  sia commensurabile, e cioè che sia uguale al rapporto fra due numeri interi  $m$  e  $n$ . Si può ipotizzare che  $m$  e  $n$  siano primi fra loro, ossia che siano privi di divisori comuni (a parte l'unità), altrimenti si divide per questi. Dato che, per il teorema di Pitagora, il quadrato di  $d$  è equivalente al doppio del quadrato di  $l$ , ne segue che:

$$(1) \quad m^2 = 2n^2$$

Il numero di destra ( $2n^2$ ) è pari, giacché ha 2 come fattore. Valendo l'uguaglianza, è pari anche il numero di sinistra ( $m^2$ ). Quindi anche  $m$  è pari, essendo sempre dispari il quadrato di un numero dispari. Di conseguenza,  $n$  sarà dispari, avendo supposto all'inizio che  $m$  e  $n$  siano primi fra loro. Dunque, dato che  $m$  è pari, si può porre  $m = 2p$ . Sostituendo nell'uguaglianza precedente (1) a  $m$  il suo valore  $2p$ , si ha:

$$(2) \quad 4p^2 = 2n^2$$

Se dividiamo entrambi i membri per 2 si ottiene:

$$(3) \quad n^2 = 2p^2.$$

Ma allora anche  $n$  risulta pari, contro il risultato precedente. L'ipotesi della commensurabilità del lato del quadrato e della sua diagonale conduce all'assurdo che uno stesso numero,  $n$ , sia contemporaneamente pari e dispari. Essendo  $n$  arbitrario, ciò che vale per  $n$  vale per ogni altro numero; perciò, ogni numero pari è dispari, e viceversa. Il che è assurdo. Dunque, lato e diagonale sono incommensurabili.

I greci chiamavano il rapporto fra la lunghezza della diagonale e quella del lato del quadrato *alogos*, cioè "irrazionale", e ancora oggi denominiamo in questo modo un numero come  $\sqrt{2}$  ( $= 1,4142135623 \dots$ ), che esprime, appunto, la relazione fra queste due grandezze incommensurabili. Che  $\sqrt{2}$  sia il valore del rapporto fra la diagonale e il lato è facilmente dimostrabile applicando, di nuovo, il teorema di Pitagora a uno dei due triangoli rettangoli in cui la diagonale divide un quadrato di lato 1. Se la diagonale  $d$  è l'ipotenusa, avremo, dunque, che  $d^2 = 1^2 + 1^2$ , cioè  $d^2 = 2$ , e quindi  $d = \sqrt{2}$ .

17 Aristotele, *Analitici Primi*, I (A), 23, 41 a 25, in [1], vol. I, p. 156.

## 10. La crisi del pitagorismo

È stato comunque messo in dubbio che la dimostrazione – molto astratta – relativa all'incommensurabilità della diagonale e del lato di un quadrato alla quale fa riferimento Aristotele possa essere quella originale. Gli storici della matematica, infatti, ritengono che i Pitagorici scoprano l'incommensurabilità considerando piuttosto un pentagono regolare con le sue cinque diagonali (come quello della precedente Fig. 5). In questo caso, incommensurabili sono il lato e la diagonale del pentagono, fra cui sussiste un rapporto "aureo".

Tracciando le diagonali e considerando i loro punti di incontro i Pitagorici individuano un altro pentagono regolare le cui diagonali individuano a loro volta un pentagono ancora più piccolo, e così via. Ebbene, sfruttando le proprietà del pentagono, si può dimostrare che un eventuale sottomultiplo comune della diagonale e del lato del pentagono di partenza sarebbe sottomultiplo comune della diagonale e del lato dei pentagoni via via costruiti, col risultato, evidentemente assurdo, che a un certo punto si otterrebbe un pentagono con la diagonale e il lato entrambi minori del sottomultiplo comune che inizialmente si era supposto esistere<sup>18</sup>.

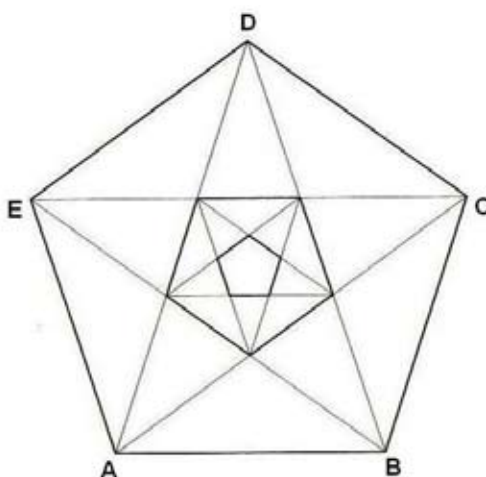


Figura 12.

Se così fosse, non sarebbe stato  $\sqrt{2}$  a rivelare per la prima volta l'esistenza di grandezze incommensurabili, ma  $\sqrt{5}$ , dato che, come si è già detto, il rapporto del lato di un pentagono regolare con la diagonale (di cui rappresenta la sezione aurea) è:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Ma per quale motivo la scoperta delle grandezze incommensurabili – comunque sia avvenuta – mette in crisi la concezione granulare delle linee sostenuta dai primi Pitagorici? La risposta è semplice: se ogni segmento fosse costituito da un numero finito di punti

<sup>18</sup> [2], p. 13



(piccoli ma *non nulli* e tutti uguali fra loro come pensavano originariamente i seguaci di Pitagora), uno qualunque di questi punti sarebbe contenuto un numero intero finito di volte (per esempio  $m$  volte) nella diagonale del pentagono, e un altro numero intero finito di volte (per esempio  $n$  volte) nel lato. Ma allora la diagonale e il lato avrebbero un sottomultiplo in comune, il punto, e non sarebbero incommensurabili. Viene dimostrato, invece, che le cose non stanno affatto in questo modo. Così i Pitagorici devono riconoscere che il punto non è un granello, ma va concepito come un ente senza dimensioni. Di conseguenza ogni segmento, per quanto breve, conterrà sempre un numero *infinito* di punti: l'infinito fa dunque irruzione nella geometria!

La natura ha sempre una sua logica matematica – attesta lo Spirito d'Avventura – ma ricorda, Paperino, che in matematica esiste il concetto di infinito! [...] Nella stella pitagorica si può inserire un'altra stella, e poi una terza, una quarta e così via all'infinito. Non c'è matita che possa disegnare finemente come l'immaginazione, né carta tanto grande da contenerla. È solo nella mente che si può contenere la nozione di infinito.

Secondo la leggenda, la scoperta delle grandezze incommensurabili diviene uno dei segreti più inconfessabili dei Pitagorici, poiché fa crollare la primitiva concezione monadica della setta e la tesi fondamentale dell'aritmo-geometria. La tradizione racconta che un giorno Ippaso di Metaponto viola l'obbligo del segreto, rendendo di pubblico dominio la teoria degli irrazionali. Ippaso è cacciato dalla scuola pitagorica e viene maledetto. Il traditore si dà alla fuga ma non fa molta strada, perché è colpito dall'ira degli dei e perisce in un naufragio a poche miglia da Crotone.

È fama che colui il quale per primo rese di pubblico dominio la teoria degli irrazionali, – scrive Euclide – sia perito in un naufragio, e ciò perché l'inesprimibile e l'inimmaginabile avrebbero dovuto rimanere sempre celati. Perciò il colpevole, che fortuitamente toccò e rivelò quest'aspetto delle cose viventi, fu trasportato al suo luogo d'origine e là venne in perpetuo flagellato dalle onde<sup>19</sup>.

La crisi del Pitagorismo sarà resa ancora più acuta dalla scoperta dei paradossi di Zenone (489 - 430 a.C.) sulla molteplicità e sul movimento (di cui il più celebre è il paradosso di Achille e della Tartaruga), entrambi legati all'infinita divisibilità dello spazio geometrico. Inoltre, la scoperta dei Pitagorici porterà Platone a considerare gli enti geometrici, e in primo luogo il punto, come *enti ideali*, che possiedono una realtà diversa dagli enti corporei. Dall'ingenuo realismo fisico dei Pitagorici, si passa al realismo metafisico di Platone, che intende la quantità – oggetto di studio della geometria – non più come esistenza corporea, ma come essenza razionale, non per questo, però, meno reale. Infatti, a giudizio di Platone, le entità matematiche sussistono in una dimensione metafisica extra-mentale al di fuori dello spazio e del tempo, e cioè nel cosiddetto "Iperuranio".

19 [5], t. III, p. 417.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Aristotele, *Organon*, Laterza, Bari 1970, 3 voll.
- [2] Borga, M. e Palladino, D., *Oltre il mito della crisi. Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*, La Scuola, Brescia 1997.
- [3] Cabrera, J., *Da Aristotele a Spielberg. Capire la filosofia attraverso i film*, Bruno Mondadori, Milano 2000, p. 28.,
- [4] Centrone, B., *Introduzione ai Pitagorici*, , Laterza, Roma-Bari 1996.
- [5] Euclides, *Elementa*, a cura di. di L. Heiberg e H. Menge, Teubner, Lipsia, 1883-1888.
- [6] Galilei, G., *Opere*, edizione nazionale a cura di A. Favaro, 20 voll. in 21, Giunti-Barbera, Firenze 1890-1909 (ristampe 1929-1939, 1964-1966, 1968).
- [7] Livio, M., *La sezione aurea. Storia di un numero e di un mistero che dura da tremila anni*, Rizzoli, Milano 2003.
- [8] Perrone, P., *Quando il cinema dà i numeri. Dal mathematics movie all'ossessione numerologica*, , Le Mani, Genova 2009.
- [9] Sani, A., *Infinito*, La Nuova Italia, Firenze 1998.
- [10] Smith, D., *Disney A to Z. The Official Encyclopedia* (3 ed.), Disney Press, New York 1997.