INSEGNARE GEOMETRIA

VINICIO VILLANI

Dipartimento di Matematica 'L. Tonelli', Università di Pisa

Ho accettato ben volentieri l'invito a questo incontro, poiché già da parecchi anni vado riflettendo sui molteplici problemi dell'insegnamento-apprendimento della geometria, a tutti i livelli scolastici. Devo però riconoscere che il titolo del seminario[1] è decisamente troppo perentorio e ambizioso, anche perché la mia esperienza diretta d'insegnamento della geometria si è svolta tutta, salvo sporadiche eccezioni, in ambito universitario (corsi di didattica della matematica e preparazione dei nuovi insegnanti in ambito SSIS). Ragione in più per apprezzare l'occasione che l'odierno incontro mi offre per un confronto di idee e di esperienze con le colleghe e i colleghi qui presenti, impegnati in svariati tipi di scuole preuniversitarie.E ringrazio fin d'ora tutti i partecipanti all'incontro per i contributi che essi daranno alla discussione prevista al termine di questa mia relazione.

Un ringraziamento specifico agli organizzatori e in particolare alla prof.ssa Silvia Dentella che, nella sua presentazione introduttiva, ha voluto esprimere un apprezzamento benevolo (forse troppo benevolo) per la mia ormai ultra-trentennale produzione scientifico-didattica.

Naturalmente lo spazio di un seminario non consente di affrontare in tutta la sua complessità un tema tanto vasto e articolato qual è quello dell'insegnamento-apprendimento della geometria: basti pensare alla pluralità e all'eterogeneità dei percorsi e degli obiettivi formativi delineati nei programmi ministeriali che si sono succeduti nel tempo in Italia, come del resto anche in tutti gli altri Paesi nei quali la geometria ha giocato e gioca tuttora un ruolo importante. Mi limiterò quindi ad esprimere le mie opinioni (spesso in controtendenza rispetto a quelle oggi alla moda) su quattro aspetti specifici:

1. L'insegnamento 'a spirale'.
2. Il 'fusionismo' tra geometria del piano e geometria dello spazio.
3. Il ruolo dei problemi.
4. Il raccordo con altre discipline.

Per chi fosse interessato ad ulteriori approfondimenti rinvio alla bibliografia posta alla fine della relazione.

1. L'insegnamento 'a spirale'

Una caratteristica peculiare della geometria sta nell'intreccio tra aspetti figurali e aspetti concettuali. La scuola non può ignorare l'immediatezza della percezione visiva già ben sviluppata fin dalla prima infanzia, ma deve assolvere anche al non facile compito di strutturare progressivamente le esperienze sensoriali degli allievi in un quadro di riferimento globale e coerente. Data la complessità di questo compito, il buon senso degli insegnanti, la graduale maturazione individuale degli allievi e un gran numero di ricerche internazionali suggeriscono concordemente l'esigenza di un percorso didattico per l'apprendimento della geometria articolato «a spirale» su vari livelli, a partire dalla scuola dell'infanzia ed esteso a tutti gli ordini scolastici successivi. Per evitare che la 'spirale' degeneri in una stanca ripetitività, è indispensabile che nel passaggio da un livello al successivo si verifichi un salto di qualità, non tanto nei contenuti quanto nella loro strutturazione disciplinare.

Una presentazione particolarmente accurata di una siffatta articolazione in livelli è quella dovuta ai coniugi van Hiele (vedi per esempio il § 2 di [4]). Dalle ricerche di van Hiele risulta in particolare che:

- Per poter accedere fruttuosamente ad un dato livello è necessaria una buona padronanza dei livelli precedenti (ciò fornisce, tra l'altro, una spiegazione in chiave didattica del fallimento della cosiddetta «matematica moderna» che qualche decennio fa veniva inflitta ad allievi impreparati a recepirla).
- La maturità degli allievi per passare da un livello al successivo non dipende solo dall'età anagrafica ma anche dal contesto socio-culturale e didattico nel quale l'apprendimento ha luogo (e ciò evidenzia il ruolo cruciale della scuola nel processo di acculturazione geometrica).

Poiché ad una lettura superficiale queste considerazioni possono apparire ovvie, reputo opportuno segnalare un paio di implicazioni didattiche tutt'altro che ovvie, che ne conseguono.

In primo luogo, l'importanza di accertare con cura le conoscenze, competenze e abilità geometriche acquisite (o non acquisite) dai singoli allievi e dalla classe nel suo complesso ai livelli precedenti, prima di passare ad un livello successivo. Fino a non molti anni fa c'erano insegnanti (anche universitari) che all'inizio di un nuovo ciclo si sentivano autorizzati a marcare la frattura con i cicli precedenti con proclami del tipo: «Dimenticate tutto quello che vi è stato insegnato finora; adesso si ricomincia daccapo». Al giorno d'oggi presumo che fortunatamente ciò non accada più.

Trovo però ancora inadeguato il metodo burocratico tuttora in uso, di somministrare un generico test iniziale seguito da un frettoloso ripasso (che annoia chi quelle cose le sapeva già e che non è sufficiente a rimuovere le lacune di chi non le sapeva). Concluso questo 'rito' l'insegnante inizia il nuovo programma seguendo pedissequamente la scansione dei capitoli e dei paragrafi del libro di testo.

L'alternativa che io prediligo è invece quella di iniziare il nuovo ciclo con una franca discussione, con partecipazione attiva di tutti gli allievi, per individuare un nucleo di «conoscenze condivise dalla classe» da assumere come punto di partenza per lo sviluppo del programma del nuovo ciclo. All'obiezione (fondata) che questa ricognizione preliminare richiede parecchio tempo rispondo con profonda convinzione che si tratta di tempo ben speso. Per esempio all'inizio di una scuola secondaria superiore tali «conoscenze condivise dalla classe» potranno includere, oltre alla nomenclatura geometrica di base, il postulato delle parallele, i tre criteri di uguaglianza dei triangoli, il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, la disuguaglianza triangolare, l'enunciato del teorema di Pitagora, ...). E il nuovo insegnamento potrà iniziare proprio da qui, assumendo questo insieme di «conoscenze condivise dalla classe» come punto di partenza per dedurne, con brevi catene di ragionamenti, altre proprietà geometriche non scontate e magari sorprendenti, quali l'esistenza dei quattro punti notevoli dei triangoli o l'incommensurabilità tra diagonale e lato di un quadrato, ecc.

Mi aspetto ora una nuova obiezione: «Ma così facendo si rinuncia alla sistematicità dell'esposizione e alla sequenzialità del libro di testo (che inizia con richiami di logica, nozioni e notazioni insiemistiche, postulati della geometria, definizioni, dimostrazioni non-intuitive di fatti geometrici intuitivamente evidenti, ...)». Anche a questa ulteriore obiezione replico con profonda convinzione che solo in una fase successiva di revisione critica gli allievi saranno maturi per comprendere ed apprezzare l'esigenza di risalire dalle «conoscenze condivise dalla classe» ad un elenco di fatti geometrici basilari non dimostrati, e quindi al complesso dei postulati «ufficiali» della geometria (quelli elencati in bell'ordine nelle pagine iniziali del libro di testo). In tutto ciò non vi è nulla di rivoluzionario: anche storicamente nello sviluppo della geometria greca sono venuti prima alcuni importanti teoremi (basti pensare a Talete e a Pitagora) e solo dopo un paio di secoli la sistemazione teorica di Euclide, seguita a distanza di ben due millenni dalla revisione critica di Hilbert ...

Come seconda implicazione didattica collegata alle riflessioni precedenti segnalo l'incompatibilità tra un insegnamento 'a spirale' del tipo qui descritto e la recente moda di parcellizzare tutta la matematica scolastica, e quindi in particolare anche la geometria, in unità didattiche autonome e slegate tra loro. Andrebbe invece valorizzato un aspetto culturale particolarmente rilevante e di segno opposto, vale a dire il ruolo della memoria a lungo termine su alcuni (pochi) fatti essenziali, abbinato alla capacità di saper reperire autonomamente sui libri di testo o sui propri appunti le informazioni necessarie per comprendere una dimostrazione o per risolvere un problema.

2. Il 'fusionismo' tra geometria del piano e geometria dello spazio

Le prime esperienze geometriche dei bambini in età prescolare riguardano figure tridimensionali quali dadi, scatole, palline, palloni, barattoli. Solo in un secondo momento la loro attenzione si rivolge alle forme delle superfici che delimitano tali solidi (quadrati, rettangoli, cerchi).

Mi piace ricordare in proposito che già vent'anni fa, nel redigere un opuscolo destinato ad un corso di aggiornamento per insegnanti della scuola di base (vedi [5]), avevamo scelto un titolo inusuale: *La geometria: dallo spazio al piano*. Ciò non voleva essere una provocazione, quanto piuttosto un modo per attirare l'attenzione dei lettori su una situazione di fatto troppo spesso trascurata nella prassi scolastica.

Nel passare dalle scuole materne ed elementari alle medie, alle superiori (e all'università) l'attenzione verso la geometria dello spazio si affievolisce vieppiù, col risultato di una sua pressoché totale emarginazione. Eppure la grande importanza di questa parte della geometria è riconosciuta (a parole) dagli estensori dei programmi d'insegnamento, dagli autori dei libri di testo, dalla maggior parte degli insegnanti!

A pseudo-giustificazione di questa estromissione della geometria tridimensionale si adducono esigenze di sistematicità (viene prima la geometria del piano e solo successivamente quella dello spazio) nonché motivi pratici e organizzativi, ampiezza dei programmi, eccessiva difficoltà, ecc. La situazione doveva essere insoddisfacente già agli inizi del Novecento, e non solo in Italia, visto che da parte di autorevoli matematici (tra cui in prima linea Felix Klein) fu elaborato un programma, detto «fusionista», col proposito di insegnare in parallelo la geometria del piano e quella dello spazio. Il successo del programma «fusionista» fu abbastanza effimero e ben presto si tornò alla scansione tradizionale, rinviando lo studio della geometria dello spazio ad un momento successivo al completamento dello studio della geometria del piano (ossia al 'giorno del mai').

Sono ben consapevole dell'impossibilità di riproporre nella nostra attuale realtà scolastica un programma dichiaratamente fusionista. Ciò che invece reputo opportuno e realisticamente praticabile è una specie di «fusionismo attenuato».

Per esempio, nelle scuole secondarie superiori non costerebbe molta fatica inserire nel tradizionale insegnamento-apprendimento della geometria del piano qualche occasionale confronto con le corrispondenti situazioni della geometria dello spazio, situazioni che si possono presumere intuitivamente note dal precedente ciclo degli studi nella scuola media o che comunque l'insegnante di scuola superiore potrebbe richiamare brevemente (e in termini solo intuitivi) al momento stesso del confronto tra piano e spazio. Nell'anno scolastico successivo andrebbe poi trovata una collocazione adeguata per un sia pur breve ciclo di lezioni sulla geometria dello spazio e a quel momento sarebbe opportuno ricordare nuovamente, a ruoli invertiti, le analogie e le differenze tra le situazioni che si presentano nella geometria tridimensionale e le corrispondenti situazioni della geometria bidimensionale.

Ecco alcuni esempi di questo 'fusionismo attenuato':

- Individuazione di analogie e differenze tra le definizioni e le proprietà del parallelismo e della perpendicolarità nel piano e nello spazio.
- Costruzione di una tabella per confrontare le formule per il calcolo delle aree di figure piane (triangoli, quadrati, cerchi,...) e le formule per il calcolo dei volumi delle omologhe figure solide (piramidi, cubi, sfere,...).

- Consapevolezza del fatto che se una figura (del piano o dello spazio) viene modificata per effetto di una similitudine di fattore k: le ampiezze angolari restano tutte invariate, le lunghezze si modificano tutte secondo il fattore moltiplicativo k, le aree si modificano tutte secondo il fattore moltiplicativo k, i volumi si modificano tutti secondo il fattore moltiplicativo k.
- Riflessione sulla rigidità (o non rigidità) delle figure geometriche: i triangoli sono figure 'rigide' del piano (terzo criterio di uguaglianza), i quadrati non sono 'rigidi'. Analogamente, i tetraedri sono figure 'rigide' dello spazio, i cubi non sono 'rigidi'.

In questo ordine di idee, una riflessione a mio parere interessante riguarda la formula di Erone che, com'è ben noto, consente il calcolo delle aree dei triangoli in funzione delle lunghezze dei lati. Poiché l'esistenza di una formula siffatta è strettamente collegata alla rigidità della figura, appare naturale congetturare l'esistenza di una formula analoga per il calcolo dei volumi dei tetraedri in funzione delle lunghezze degli spigoli. Sorprendentemente invece, questa congettura si rivela falsa (cfr. per esempio il §16 di [4]).

3. Il ruolo dei problemi

Come già accennato nel §1, nel nostro Paese l'insegnamento tradizionale della geometria tende, almeno dalla scuola media in poi, ad una crescente sistematicità che privilegia gli aspetti teorici rispetto a quelli di «scoperta guidata» e di *problem solving*. Agli allievi si chiede di studiare (a memoria?) le definizioni, gli enunciati e le dimostrazioni dei principali teoremi. Vengono poi proposti esercizi strettamente collegati alla parte teorica, nel senso che la strategia risolutiva è di fatto predeterminata da un «contratto didattico» implicito in base al quale l'allievo sa già a priori che ogni esercizio relativo ad un dato capitolo ammette un'unica soluzione a cui egli dovrà tentare di pervenire sfruttando uno o più risultati teorici esposti in quello stesso capitolo. In altri Paesi prevale invece un'impostazione pragmatica, basata su un coinvolgimento più attivo degli allievi, ai quali si chiede di formulare essi stessi qualche definizione, di congetturare l'enunciato di qualche teorema partendo da osservazioni empiriche e dall'esame di qualche caso particolare, di scegliere le strategie risolutive degli esercizi e dei problemi proposti (non necessariamente tutti a soluzione unica).

Entrambi questi approcci presentano lati positivi e limiti.

Nell'impossibilità di entrare in questa sede in maggiori dettagli, mi limito a presentare alcuni esempi di situazioni problematiche che considero particolarmente formative e che possono essere affrontate anche nell'ambito di un insegnamento prevalentemente teorico, fin dalla scuola media o all'inizio della scuola secondaria superiore. È sottinteso che le attività qui di seguito proposte comportano momenti di lavoro individuale, o a piccoli gruppi, e momenti di discussione collettiva con partecipazione attiva di tutti gli allievi.

Situazione problematica 1
(Padronanza linguistica)

Date una definizione di «triangolo» (la stessa consegna può essere ripetuta per altre figure geometriche ben note, quali segmenti, angoli, parallelogrammi, cerchi, cubi, prismi, sfere, relazione di parallelismo nel piano e nello spazio, ecc.).

Commento. Un confronto tra le formulazioni date dai singoli allievi dovrebbe consentire di giungere ad una o più definizioni accettate da tutta la classe. A questo punto sarà giunto il momento di stabilire un confronto con le definizioni reperibili nei libri di testo, o sui vocabolari.

L'obiettivo didattico specifico di quesiti di questo tipo è quello di far toccare con mano la difficoltà e l'importanza di saper caratterizzare con parole chiare e univoche enti geometrici intuitivamente ben noti. Ciò favorirà l'acquisizione di una padronanza linguistica nell'ambito specifico della geometria, ma spendibile anche, ben al di là della sola geometria, nella vita adulta quotidiana e professionale.

E sempre in tema di padronanza linguistica, ecco un altro quesito, questa volta a risposta multipla, finalizzato ad accertare la capacità degli allievi di utilizzare correttamente connettivi e quantificatori.

Situazione problematica 2
(Argomentare e ragionare correttamente)

Quesito. Un poligono si dice regolare quando ha tutti i lati e tutti gli angoli uguali. Pertanto un poligono è irregolare (= non regolare) quando ha:

1. tutti i lati e tutti gli angoli fra loro disuguali;
2. tutti gli angoli uguali ma i lati disuguali oppure tutti i lati uguali ma gli angoli disuguali;
3. almeno una coppia di lati disuguali e almeno una coppia di angoli disuguali;
4. almeno una coppia di lati disuguali oppure almeno una coppia di angoli disuguali.

Commento. In un'indagine di qualche anno fa (vedi [1], p. 28) solo il 31% degli studenti del primo anno di varie scuole superiori della Toscana ha saputo dare la risposta corretta d. Aspetto particolarmente preoccupante se si tiene conto che messaggi pubblicitari, promesse dei politici in campagna elettorale, contratti di assicurazione, ecc. giocano spesso su fraintendimenti logico-linguistici di questo tipo per far sembrare le loro offerte più allettanti di quanto non lo siano realmente.

Situazione problematica 3
(La formula per il calcolo del volume di una piramide)

Premessa. Si consideri un cubo con spigolo di lunghezza s.

Congiungendo il centro O del cubo con i suoi otto vertici si vengono a formare sei piramidi uguali tra loro. Poiché il volume del cubo è dato dalla formula V(cubo) = s^3, ciascuna delle sei piramidi avrà volume

$$(*)\ V(\textit{piramide}) = s^3/6$$

D'altra parte ciascuna piramide ha area di base $A = s^2$ e altezza $h=s/2$. Sostituendo queste espressioni in (*) si perviene alla formula

$$(**)\ V(\textit{piramide}) = \frac{Ah}{3}$$

Quesito. In base a quanto visto nella premessa è lecito concludere che la formula (**) è valida per ogni piramide?

Commento. La risposta è ovviamente negativa. Nondimeno questo caso particolare ci fornisce un'informazione importante: Ammessa l'esistenza di una formula che consente di esprimere il volume di una piramide in termini della sua altezza e dell'area della sua base, tale formula non può essere altro che la (**).

Situazione problematica 4
(Sviluppi del cubo)

Lo sviluppo 'a croce' di un cubo è ben noto. Esistono altri sviluppi? Quanti sono? Tra tutti gli sviluppi possibili, ve n'è qualcuno che presenta vantaggi (o svantaggi) rispetto a quello 'a croce'?

Commento. Si tratta di una proposta di lavoro intesa a coinvolgere tutti gli allievi di una classe in una ricerca comune, concettualmente semplice ma operativamente impegnativa, visto che si tratta di esaminare attentamente una quantità notevole di casi, vedi per esempio [5].

Dopo aver ben compreso i termini del problema, gli allievi constateranno che gli eventuali ulteriori sviluppi devono essere un sottoinsieme dell'insieme di tutte le sestine di quadrati (uguali tra loro) opportunamente affiancati. Presumibilmente, dopo avere effettuato alcuni tentativi disordinati, gli allievi si troveranno costretti a seguire una strategia sistematica per disegnare tutte le possibili sestine e per identificare successivamente quelle che consentono una ricostruzione del cubo mediante incollamento delle coppie di lati dei quadrati destinati a formare uno spigolo del cubo.

La determinazione di tutte le possibili sestine non presenta particolari difficoltà concettuali, ma è alquanto laboriosa dato il loro numero elevato. Converrà quindi procedere per gradi, iniziando dalle possibili configurazioni che si possono ottenere affiancando dapprima solo due quadrati, poi tre, quattro, cinque e infine sei. Chiaramente nel caso di due soli quadrati affiancati c'è un'unica configurazione possibile. Aggiungendo un terzo quadrato ai primi due si possono formare due configurazioni distinte. Aggiungendo un quarto quadrato a ciascuna delle due configurazioni formate da tre quadrati se ne possono ottenere cinque. Ma è probabile che a questo punto qualche allievo affermi che ne esiste anche qualcun'altra (speculare rispetto ad una delle cinque).

Il docente potrà cogliere questo spunto per dirimere la questione, ricordando che per convenzione in geometria si considerano uguali anche due figure speculari, a differenza della convenzione in uso in altri ambiti (per esempio nel nostro alfabeto, dove b , d , p , q sono da considerarsi lettere diverse).

Procedendo alla stessa maniera si costruiranno tutte le configurazioni realizzabili con cinque quadrati e infine tutte quelle realizzabili con sei quadrati.

Per decidere se una di queste sestine consente una ricostruzione del cubo, converrà usare matite colorate per identificare con uno stesso colore le coppie di lati liberi che nella ricostruzione vanno a formare uno spigolo del costruendo cubo. Altra ottima occasione per saggiare la capacità degli allievi di decidere mediante una riflessione mentale se la ricostruzione 'chiude' o se il procedimento si blocca ad un certo punto.

Per farla breve, si troveranno gli undici sviluppi del cubo disegnati in figura.

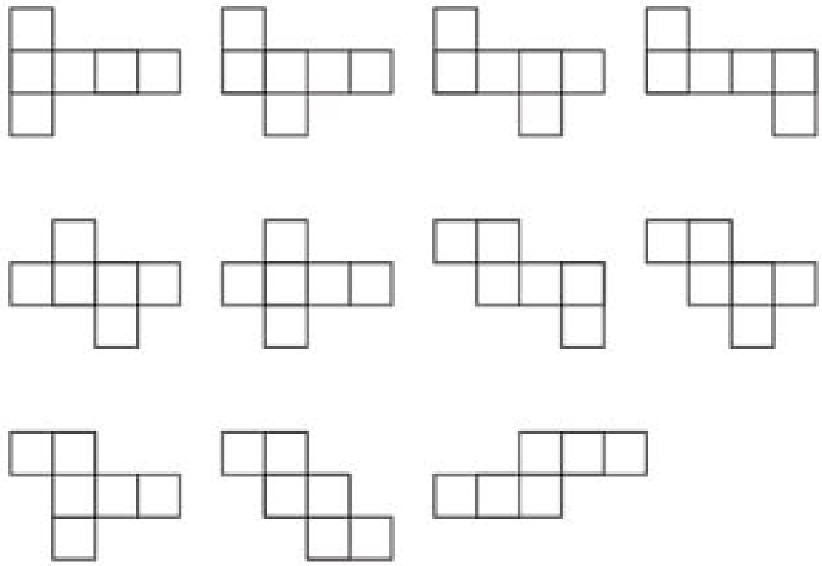

Figura 1 - Gli 11 sviluppi del cubo.

La formulazione dell'ultima domanda del problema è intenzionalmente molto generica. Nel proporla avevo in mente un'ipotetica realizzazione industriale di scatole cubiche, ottenute ritagliandone gli sviluppi piani da un rotolo di cartone di larghezza costante e di lunghezza pressoché illimitata. Si constata facilmente che nel caso dei due sviluppi disegnati nella figura in basso a destra lo spreco di materiale è praticamente nullo, in quanto entrambi questi sviluppi «piastrellano» una striscia illimitata (nonché tutto il piano).

Una possibile variante di questa situazione problematica è quella dello studio degli sviluppi piani di scatole con spigoli di lunghezze diverse (parallelepipedi rettangoli).

Questo quesito mi sembra utile, tra l'altro, per sfatare l'opinione diffusa tra i nostri allievi che un quesito matematico, o lo si sa risolvere in pochi minuti, o non lo si sa risolvere affatto. E, anche in questo caso, la valenza di un allenamento alla sistematicità nell'affrontare un problema complesso va ben al di là della geometria, e riguarda moltissime situazioni della vita professionale in tutti i campi.

Situazione problematica 5
(Geodetiche su superfici dello spazio)

Si chiede di caratterizzare i percorsi minimi tra due punti A, B situati sulla superficie di un cubo, di un cilindro, di un cono, di una sfera.

Commento. Nel caso dei cubi, dei cilindri e dei coni conviene passare ai rispettivi sviluppi piani (che si possono realizzare con opportuni tagli, senza modificare le proprietà metriche delle superfici in esame. Nel caso della superficie sferica ciò non è possibile. Semplici considerazioni sperimentali consentono tuttavia di rendere plausibile la risposta corretta: i percorsi più brevi sono quelli sulle circonferenze massime passanti per i due punti (e scegliendo, tra i due archi di estremi A e B, quello minore, vedi il §22 di [4]).

L'aspetto più interessante di questa situazione problematica sta nel fatto che l'introduzione del termine «geodetica» per caratterizzare le linee che minimizzano (almeno localmente) le lunghezze dei percorsi tra due punti di una superficie accomuna le rette del piano e le circonferenze massime della sfera. Ciò consente di considerare la sfera come un modello fisicamente realizzabile e intuitivamente comprensibile di una geometria «non euclidea».

Gli allievi potranno essere dunque coinvolti nella costruzione di una tabella comparativa tra la geometria euclidea del piano e la geometria della sfera.

	PIANO	SFERA
Elementi costitutivi	I punti del piano.	I punti della superficie sferica.
Linee geodetiche	Il cammino più breve tra due punti è un segmento di retta.	Il cammino più breve tra due punti è il minore dei due archi di circonferenza massima.
Relazioni di collegamento	Per due punti passa un'unica geodetica.	Per due punti non antipodali passa un'unica geodetica; per due punti antipodali ne passano infinite.
Relazioni di partizione	(I) Due punti di una geodetica dividono la geodetica in tre parti, due delle quali illimitate. (II) Ogni geodetica divide il piano in due parti simmetriche (semipiani).	(I) Due punti di una geodetica dividono la geodetica in due parti, entrambe limitate. (II) Ogni geodetica divide la superficie sferica in due parti simmetriche (semisfere).
Parallelismo	Per ogni punto P del piano (esterno ad una geodetica r) esiste un'unica geodetica passante per P e disgiunta da r.	Dato un punto P della superficie sferica esterno ad una geodetica γ non esiste alcuna geodetica passante per P e disgiunta da γ.
Somma delle ampiezze angolari dei triangoli	La somma degli angoli interni di un triangolo è sempre un angolo piatto π.	La somma σ degli angoli interni di un triangolo sferico T è sempre maggiore di un angolo piatto π, e più precisamente la differenza $\sigma - \pi$ è proporzionale all'area di T.
Similitudini	Per ogni numero reale $k > 0$ esistono similitudini di rapporto k.	Le uniche similitudini sono le isometrie, ossia le similitudini di rapporto $k = 1$.

Figura 2 - Proprietà geometriche del piano e della sfera a confronto.

4. Il raccordo con altre discipline

La geometria interagisce direttamente o indirettamente con molte altre discipline scolastiche. Mi sembra quindi un vero peccato che tali legami non vengano adeguatamente valorizzati dagli insegnanti di matematica, ove possibile in collaborazione con i colleghi delle discipline coinvolte.

Ecco, in estrema sintesi, qualche esempio in proposito, proponibile a livello di scuola media e superiore:

a. Geometria e lingua

- Abituare gli allievi ad esporre sempre in modo linguisticamente chiaro e corretto i ragionamenti fatti per giungere alla soluzione di un esercizio o di un problema.
- Saper utilizzare correttamente i connettivi e i quantificatori.
- Concordare con l'insegnante di lettere una riflessione comune (linguistica e matematica) su qualche breve brano di grandi pensatori del passato quali Platone (penso per esempio al dialogo di Socrate con lo schiavo di Menone sulla duplicazione del quadrato) o Galileo (penso per esempio al famoso brano tratto dal Saggiatore: «La filosofia è scritta in questo grandissimo libro ... io dico l'universo ... Egli è scritto in lingua matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi e altre figure geometriche...»).

b. Geometria e storia, storia dell'arte, filosofia

- Inquadrare storicamente le principali tappe della geometria nella cultura scientifica e filosofica dell'epoca: Talete, Pitagora, Euclide, Cartesio, Kant, Hilbert e la crisi dei fondamenti, ...
- Collegare gli aspetti matematici delle trasformazioni geometriche con le ricerche dei pittori di epoca rinascimentale sulle leggi della visione prospettica (Piero della Francesca, L. B. Alberti, A. Dürer, ...). (cfr. per esempio i §§18 e 19 di [4]).

c. Geometria e geografia, astronomia

- Evidenziare il ruolo fondamentale della geometria per la determinazione delle dimensioni della Terra (Eratostene) e delle distanze Terra-Luna, Terra-Sole.
- Mettere a confronto i diversi tipi di carte geografiche dal punto di vista delle loro proprietà matematiche (carte geodetiche, equivalenti, conformi, lossodromiche) con riferimento ai rispettivi ambiti di utilizzo. (cfr. per esempio il §22 di [4]).

d. Geometria e tecnologia

- Ruolo della riga e del compasso nella geometria classica e uso moderno di opportuno software geometrico.

- Curve geometriche e loro realizzazioni meccaniche. Penso per esempio alla bellissima mostra «Oltre il compasso» realizzata circa quindici anni fa dal collega e amico Franco Conti, purtroppo prematuramente scomparso.

La mostra è attualmente visitabile a Firenze nel Museo per la Matematica (Il Giardino di Archimede) diretto da Enrico Giusti. Anche in varie altre città italiane (per esempio, a Milano, Modena, Trieste) si trovano mostre matematiche interessanti che possono contribuire validamente a far apprezzare la bellezza della geometria e il suo ruolo fondamentale nei più svariati settori delle attività umane.

e. Geometria, fisica, chimica

- Problemi di minimo percorso dei raggi luminosi.
- Classificazione dei cristalli rispetto alle loro simmetrie.
- Rappresentazione tridimensionale delle strutture molecolari.

5. Riflessioni conclusive

Fra i temi che non ho potuto affrontare in questa relazione per mancanza di tempo, ne segnalo tre, che considero particolarmente rilevanti:

- Una riflessione sulle finalità culturali e applicative dell'insegnamento della geometria nei vari tipi delle nostre scuole secondarie, e sulla coerenza (o non-coerenza) tra le finalità dichiarate e la prassi didattica corrente (vedi per esempio [2]).
- Un confronto fra la tradizione italiana dell'insegnamento della geometria, di impostazione sostanzialmente euclidea, e altri possibili approcci, basati per esempio sul metodo delle trasformazioni geometriche (vedi [3]).
- Una discussione sui pregi e sugli inconvenienti di un'introduzione più precoce e più sistematica della geometria analitica nonché delle strutture vettoriali, a scapito della geometria sintetica. (vedi per esempio [2]).

NOTE

[1] Il seminario per insegnanti 'Insegnare geometria' si è svolto a Pisa, il giorno 30 ottobre 2006, nell'ambito di Pianeta Galileo.

BIBLIOGRAFIA

[1] MA-LI (Matematica e Lingua), *Tra numeri e parole. Ricerca dell'IRRSAE Toscana sul passaggio tra la Scuola Secondaria di primo grado e quella di secondo grado*, a cura di F. De Michele, L. Nuti, V. Villani Le Monnier, Firenze 1999.

[2] Villani V., L'insegnamento preuniversitario della geometria: molte domande, qualche risposta, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 17 A, 5 (1994) pp. 439-457.

[3] Villani V., Le trasformazioni geometriche nella scuola secondaria superiore, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 18 A, 6 (1995) pp. 669-688.

[4] Villani V., *Cominciamo dal punto – Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della matematica: Geometria*, Pitagora ed., Firenze 2006.

[5] Villani V., Sainati Nello M., Sciolis Marino, M. *La geometria: dallo spazio al piano*, Quaderno CNR n.2. Seminario Didattico del Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Pisa 1985.