Poincaré matematico e filosofo

Gaspare Polizzi

Facoltà di Scienza della Formazione, Università di Firenze
Liceo Classico «Galileo», Firenze

In *Scienza e metodo* (1908), scrivendo sul ruolo del caso in fisica Jules-Henri Poincaré proponeva con una metafora la corrispondenza tra fisica e storia: come nei fenomeni fisici casuali una piccola causa può produrre grandi effetti, così nella storia un caso può determinare grandi conseguenze, e il caso più grande si verifica quando nascono grandi uomini che mutano il corso della storia [10], pp. 49-53. Poincaré fu un grande uomo, forse l'ultimo grande scienziato moderno: nella sua biografia intellettuale si rintraccia il punto di biforcazione fra le tre principali direttrici teoriche della fisica odierna: la fisica del caos, la teoria della relatività, la teoria dei quanti. Si potrebbe aggiungere che forse senza Poincaré non sarebbe stato così mirabilmente prodotto quel grandioso sistema complesso costituito dalle teorie fisiche del Novecento. L'opera di Poincarè copre con risultati di tale rilievo la matematica, la fisica, l'astronomia, la cosmologia e l'epistemologia del Novecento, da mantenere in tutti questi settori un alto grado di attualità.

1. Poincaré nel quadro attuale delle scienze

Cercherò di dimostrare perché è importante parlare di Poincaré oggi, nel quadro attuale delle scienze e perché Poincaré non è soltanto un grande scienziato, ma anche un grande filosofo, che ha posto in rapporto la sua professione di matematico con alcune questioni rilevanti nella filosofia della scienza e nell'epistemologia. Parto da due notizie d'attualità.

Il matematico Grigorij Perelman è stato proposto nell'estate del 2006 per la Medaglia Fields, il premio Nobel dei matematici, per aver dimostrato la «congettura di Poincaré», che recita: «Se un oggetto tridimensionale dato ha le proprietà – compattezza, connessione semplice, assenza di bordi eccetera – di una sfera, non può che essere la deformazione di una sfera». Nonostante la figura controversa di Perelman, che non ha ritirato la medaglia e non è reperibile, la vicenda illustra simbolicamente l'attualità di alcune ricerche matematiche di Poincaré, che hanno dato luogo alla topologia algebrica e ancora oggi sono oggetto di dimostrazione. Poincaré, fondando la topologia algebrica, aveva posto i seguenti interrogativi:

1. Qual è il tipo di varietà geometrica tridimensionale semplicemente connesso[1]?
2. Ve ne sono altrettanto semplicemente connesse o è unico?

3. Che tipi di varietà tridimensionali esistono?

Nelle sue ricerche Perelman ha risposto a tutte e tre le domande, contribuendo così alla sistemazione odierna della topologia algebrica. Le risposte alle prime due domande sono, rispettivamente: *ad* 1) la sfera, *ad* 2) è unico, mentre per rispondere alla terza Perelman ha realizzato una complessa classificazione delle varietà tridimensionali a partire dalle tre varietà bidimensionali di base, a curvatura costante positiva (sfera), a curvatura zero (toro), a curvatura negativa (sella).

Un'altra vicenda dei nostri giorni riguarda la proposta di assegnare il premio Nobel per il 2006 al fisico italiano Giorgio Parisi. Anche in questo caso il legame con Poincaré è particolarmente forte, e soprattutto con la sua teoria del «caos deterministico».

Parisi ha condotto studi sui sistemi dinamici non lineari per descriverne il comportamento. In particolare, si è soffermato sui vetri di spin**,** leghe di oro e ferro che hanno un comportamento magnetico anomalo a bassissime temperature e che si presentano come sistemi non lineari. Parisi ci ricorda come non è possibile una comprensione completa dei fenomeni nel quadro di sistemi non lineari: tale comprensione si può ottenere solo quando il comportamento del sistema è lineare, cioè quando la reazione di ogni componente del sistema è esprimibile nei termini di una funzione lineare della perturbazione esterna, come per esempio nelle molle di buona qualità, dove l'allungamento è proporzionale alla forza. E aggiunge che

> Molti di questi problemi fortemente non-lineari rimangono come dei puzzle irrisolti attorno ai quali si concentra l'attività dei fisici. Una teoria generale dei sistemi non-lineari non è al momento disponibile e solo in alcuni casi fortunati esiste una trattazione teorica soddisfacente, che non faccia uso della teoria delle perturbazioni rispetto a un sistema lineare [7], p. 33.

Ci ritroviamo così nel pieno di quella visione complessa della natura che Poincaré aveva studiato nelle ricerche che andranno sotto il nome di «caos deterministico» ed evocato già nel suo primo libro divulgativo, *La scienza e l'ipotesi* (1902), dove scriveva:

> Dunque, siamo portati ad agire come se una legge semplice fosse, a parità di tutte le circostanze, più probabile di una legge complicata. Mezzo secolo fa si confessava francamente e si proclamava che la natura ama la semplicità; ma è stata proprio la natura che in seguito ci ha dato troppe smentite [9], p. 152.

2. Qualche notizia biografica

Prima di illustrare la visione fisico-matematica di Poincaré fornisco qualche informazione sulla sua biografia intellettuale e scientifica[2].

Nato nel 1854 a Nancy, Jules Henri compie i primi studi nella sua città natale; in seguito, partecipa ai concorsi per l'ammissione all'*École Polytechnique* e all'*École normale supérieure* e li vince entrambi, ma sceglie la prima delle due grandi scuole. Nel 1879, a venticinque anni, è dottore in matematica e inizia a insegnare all'Università di Cannes. Da quel momento la sua carriera universitaria è lineare. Accumula trentuno anni di impegno accademico ininterrotto, segnati sostanzialmente da due importanti passaggi: quello che nel 1886 lo conduce dall'insegnamento di analisi matematica a quello di fisica matematica e calcolo delle probabilità (occuperà questa cattedra fino al 1896), e quello che nel 1896 lo porta a insegnare Astronomia matematica e Meccanica celeste. Si tratta dei due più importanti momenti di passaggio della sua carriera universitaria e della sua ricerca, che configurano un deciso spostamento negli interessi scientifici.

La sua biografia intellettuale è infatti divisa nei tre ambiti dell'analisi matematica, della fisica matematica e della meccanica celeste. In tutti e tre questi settori i contributi di Poincaré sono della massima importanza. Nel primo sono decisivi i suoi apporti in analisi, teoria delle funzioni e topologia algebrica; nel secondo i contributi all'elettrodinamica, all'ottica e all'elettromagnetismo; nel terzo significativi gli studi di cosmologia e astrofisica. Probabilmente, nessuno scienziato oggi potrebbe ripercorrere la varietà di studi e di settori di ricerca di Poincaré.

Le sue memorie scientifiche sono quasi cinquecento e le *Œuvres* scientifiche, che raccolgono l'insieme della sua produzione scientifica consistono di undici volumi di diecimila pagine [8]. Al fondo si riscontra l'atteggiamento scientifico di un matematico, che rimane fermo in tutta la sua produzione, paragonata per vastità e profondità a quella di Karl Friedrich Gauss, e insieme un'attenzione costante alla fisica, nella quale vede la vera sorgente dei problemi matematici.

3. Le ricerche sul «caos deterministico»

Guardiamo ora agli aspetti di novità del pensiero fisico-matematico di Poincaré, iniziando con la teoria del «caos deterministico». Nella fortunata opera divulgativa citata all'inizio, *Scienza e metodo*, il matematico di Nancy propone tre chiari esempi di equilibrio instabile:

> Il primo esempio che sceglieremo è quello dell'equilibrio instabile; se un cono poggia sulla punta, noi sappiamo che cadrà, ma non sappiamo da quale parte; ci sembra che a deciderlo sia il semplice caso. Se il cono fosse perfettamente simmetrico, se il suo asse fosse perfettamente verticale, se non fosse sottomesso a nessun'altra forza all'infuori della gravità, non cadrebbe affatto. Ma il minimo scarto dalla simmetria lo farà pendere leggermente da un lato o dall'altro, e dal momento in cui penderà, anche di poco, cadrà del tutto da quella parte. Se anche la simmetria fosse perfetta, una leggerissima trepidazione, un soffio d'aria potrà farlo inclinare di qualche secondo d'arco; sarà abbastanza per determinarne la caduta e il senso della stessa, che sarà quello dell'inclinazione iniziale.
>
> Una causa trascurabile, che ci sfugge, determina un effetto considerevole che non possiamo non vedere, e allora diciamo che questo effetto è dovuto al caso. Se noi conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo predire esattamente la situazione di questo stesso universo in un istante successivo. Ma, quand'anche le leggi naturali non avessero più segreti per noi, non potremmo conoscere la situazione iniziale se non *approssimativamente*. Se ciò ci permette di prevedere

> la situazione successiva *con la stessa approssimazione*, questo è tutto ciò di cui abbiamo bisogno, e diciamo allora che il fenomeno è stato previsto, che è regolato da certe leggi; ma questo non succede sempre, può succedere infatti che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne generino di grandissime nei fenomeni finali; un piccolo errore nelle prime produrrebbe un enorme errore sugli ultimi. La predizione diventa impossibile e noi siamo di fronte ad un fenomeno fortuito.
>
> Il nostro secondo esempio, preso a prestito dalla meteorologia, avrà molte analogie col primo. Perché i meteorologi incontrano tante difficoltà nel predire il tempo con qualche certezza? Perché le piogge, e persino le tempeste ci sembrano arrivare per caso, in modo che molta gente trova naturale pregare per avere la pioggia o il bel tempo, mentre giudicherebbe ridicolo chiedere un'eclisse con una preghiera? Noi notiamo che le grandi perturbazioni hanno luogo generalmente nelle regioni in cui l'atmosfera è in equilibrio instabile. I meteorologi vedono chiaramente che questo equilibrio è instabile, che un ciclone sorgerà da qualche parte; ma dove, non sono in grado di dirlo; un decimo di grado in più o in meno in un punto qualsiasi, e il ciclone scoppia qui e non là, provocando le sue devastazioni su zone che avrebbe altrimenti risparmiato. Se avessimo conosciuto questo decimo di grado, avremmo potuto saperlo in anticipo, ma le osservazioni non erano né abbastanza serrate ne abbastanza precise, e così tutto ci sembra dovuto all'intervento del caso. Anche qui troviamo lo stesso contrasto tra una causa minima, non apprezzabile dall'osservatore, e degli effetti considerevoli, che sono a volte degli spaventosi disastri.
>
> Passiamo ad un altro esempio, la distribuzione dei piccoli pianeti sullo zodiaco. Qualunque fossero le loro longitudini iniziali, i loro moti medi erano diversi ed essi circolano da talmente tanto tempo che possiamo dire che attualmente essi sono distribuiti a caso lungo lo zodiaco. Piccolissime differenze iniziali tra le loro distanze dal sole, oppure, che fa lo stesso, tra i loro moti medi, hanno finito per produrre enormi differenze tra le loro longitudini attuali; un eccesso di un millesimo di secondo nel moto medio diurno, darà infatti un secondo in tre anni, un grado in diecimila anni, una circonferenza intera in tre o quattro milioni di anni: che cos'è questo in confronto al tempo che è trascorso da che i piccoli pianeti si sono staccati dalla nebulosa di Laplace ? Ecco dunque ancora una volta una piccola causa ed un grande effetto; o meglio piccole differenze nella causa e grandi differenze nell'effetto [10], pp. 49-50.

Vorrei innanzitutto far notare come il secondo esempio, quello tratto dalla meteorologia, sia estremamente moderno. Sarà il meteorologo Edward Lorentz a definire tali fenomeni caotici con l'espressione «effetto farfalla». L'individuazione di sistemi non-lineari, lontani dall'equilibrio, costituisce il nuovo orizzonte di riferimento nel quale si sviluppano le indagini matematiche di Poincaré applicate all'astronomia che daranno luogo alla matematica del «caos deterministico». L'occasione è propiziata dalle ricerche astronomiche e dal tentativo di validare il determinismo cosmico derivato dalla teoria newtoniana e realizzato nella sintesi laplaciana.

Il problema cosiddetto dei 'tre corpi', consistente nella definizione delle interazioni gravitazionali relative a tre (o più) corpi celesti tramite il calcolo delle perturbazioni reciproche, era noto già al tempo di Newton. Esso aveva avuto una prima «soluzione» di tipo teologico, con Newton e con Leibniz. Alexandre Koyré ha ricordato che Newton sosteneva l'idea del cosiddetto «Dio dei giorni feriali», ovvero di un Dio che interviene correggendo le perturbazioni via via che esse si producono, Leibniz invece propendeva per il cosiddetto «Dio del Sabbath», cioè di un Dio che predispone fin dall'inizio la perfezione del sistema astronomico [4], pp. 178-205.

Naturalmente, il difetto non sta nella teoria di Newton, che ben rappresentava l'ordine del cosmo, ma il problema è dovuto al fatto che in natura non si dà un sistema fisico isolato e che vanno considerate tutte le possibili perturbazioni legate all'interazione di tre o più sistemi di riferimento. Si tratta di trovare gli strumenti matematici che possano trattare un'enorme varietà di possibili evoluzioni di sistemi individuali. L'importanza del problema venne attestata dal ricco premio proposto per la sua soluzione dal re Oscar II di Svezia nel 1889. Il bando del concorso richiedeva di «sviluppare le coordinate di ogni particella in una serie che procede secondo qualche funzione nota del tempo e che converge uniformemente in ogni intervallo di tempo» [1], p. 28[3]. Si trattava di fornire delle soluzioni matematiche al problema astrofisico della stabilità del sistema solare, dove si danno tre o più corpi che interagiscono con perturbazioni gravitazionali che modificano le traiettorie teoriche dei corpi considerati. In altri termini, le traiettorie effettive dei corpi celesti del sistema solare non corrispondono alle traiettorie teoriche, perché vi sono perturbazioni gravitazionali. Ora, quali sono le soluzioni matematiche che possono permettere di includere queste perturbazioni all'interno delle traiettorie?

Poincaré vince il premio fornendo tre possibili soluzioni matematiche:

- una soluzione periodica, che considera la possibilità del ritorno dei corpi alle stesse posizioni e alle stesse velocità relative;
- una soluzione asintoticamente periodica, che considera la possibilità di un avvicinamento sempre più costante al caso periodico;
- una soluzione doppiamente asintotica, che considera le traiettorie prossime a quelle periodiche, soltanto per i casi di un futuro molto lontano e di un passato anch'esso molto lontano.

Uno dei membri della commissione giudicante, Weierstrass, scrisse che quella di Poincaré era una pubblicazione destinata ad aprire un'era nuova nella storia della meccanica celeste.

L'efficacia delle ipotesi proposte da Poincaré poggiava soprattutto sulla potenza degli strumenti matematici, favorita dalla scoperta delle funzioni automorfe, funzioni che sviluppano un isomorfismo di un gruppo di trasformazioni su se stesso. Tale scoperta, che ha la sua radice nelle ricerche di Felix Klein e di Sophus Lie, che nel 1870 si erano ritrovati a Parigi elaborando insieme l'idea di applicare la teoria dei gruppi alle teorie geometriche a partire dallo studio del *Traité des substitutions* (1870) di Camille Jordan e di ricercare la corrispondenza tra gli assiomi di una geometria e i gruppi algebrici di trasformazioni, testimonia la propensione di Poincaré all'analisi matematica e l'esigenza di stabilire un'interazione stretta tra analisi, geometria e fisica.

Nascerà così la topologia algebrica, che muove dallo studio delle funzioni algebriche a due variabili e descrive curve algebriche piane.

Per studiare le funzioni automorfe Poincaré divide il piano complesso in un numero infinito di parallelogrammi tutti uguali fra loro (a partire da un parallelogramma qualsiasi si ottengono tutti gli altri mediante le trasformazioni di gruppo). Il gruppo di trasformazioni associato a una funzione fuchsiana (tipo particolare di funzione automorfa generata dall'inversione del rapporto di due integrali delle soluzioni di un'equazione differenzialelineare di secondo ordine) compone poligoni i cui lati descrivono archi di circonferenza. La superficie ricopre una regione del piano «semplicemente connessa», come si dice in topologia algebrica, e le trasformazioni che essa consente a partire da poligoni curvilinei (del tipo di quelli rappresentati nella figura) formano un gruppo che descrive la geometria di Bolyai e Lobacevskij (una geometria non-euclidea).

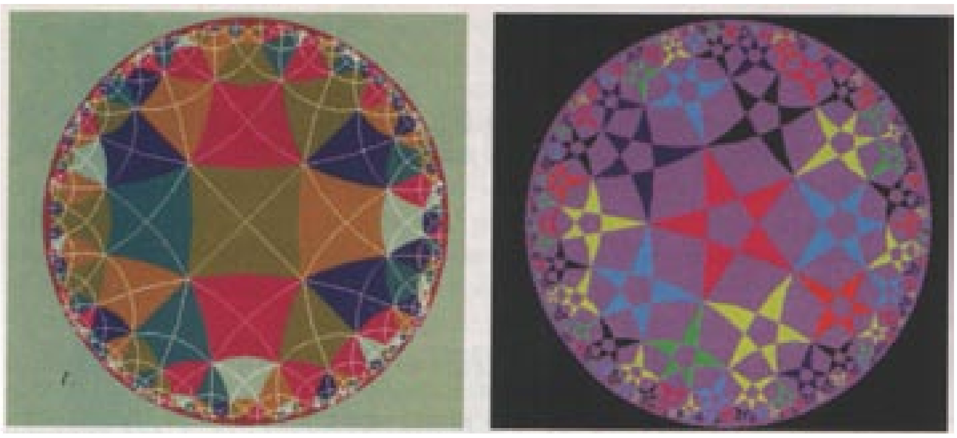

Figura 1 - Poligoni curvilinei.

L'uso di una geometria non-euclidea per risolvere un problema di analisi matematica dimostra come – nell'esperienza concreta dei matematici – le geometrie non-euclidee diventavano strumenti per la generalizzazione dell'analisi: nel quadro di una concezione geometrica dell'analisi i problemi analitici venivano illuminati da intuizioni geometriche che facevano uso di diverse metriche. Poincaré contribuisce quindi in modo efficace all'inserimento delle geometrie non-euclidee in una visione analitica del mondo fisico, meccanicisticamente espresso in equazioni differenziali.

Il tentativo di soluzione del problema dei tre corpi proposto da Poincaré risveglia le inquietudini sulla stabilità del sistema newtoniano. Poincaré si pone una questione apparentemente semplice, più ristretta rispetto al quesito proposto: considerando tre masse di diversa grandezza e supponendo che ognuna delle prime due descriva una circonferenza intorno al loro comune baricentro e che la terza, priva di massa rispetto alle altre due, si muova nel piano di questa circonferenza, soggetta alla loro attrazione (come nel caso dei satelliti che si muovono intorno a Giove), come si potranno descrivere le orbite rispettive dei tre corpi? Se ne può fornire una descrizione rigorosa nel quadro del sistema newtoniano dell'orbita sulla quale ruota il nostro pianeta, nel contesto delle interazioni gravitazionali con gli altri pianeti del sistema solare?

Poincaré risolve tale «problema ristretto dei tre corpi» muovendo dallo studio delle soluzioni periodiche e facendo uso delle sue ricerche sulle funzioni automorfe. Lo studio dell'evoluzione continua di un sistema dinamico si trasforma così in un problema geometrico: l'analisi di una serie discontinua di punti nel piano. Poincaré proietta quindi il piano su una sfera (il centro della sfera sarà il centro di proiezione): ogni punto del piano è proiettato sulla superficie della sfera in due punti simmetrici rispetto al centro della sfera, mentre la proiezione di una retta è il cerchio massimo. L'analisi di tali «punti singolari» (oggi chiamati «singolarità» o «punti catastrofici») costituisce l'aspetto qualitativo delle soluzioni di un'equazione differenziale che definisce le curve tracciate sul piano suddetto. Tale analisi permette di classificarli come:

- *punti di sella* (attraverso i quali passano due e due sole *caratteristiche*, come Poincaré chiamava le soluzioni dell'equazione relativa alle curve),
- *nodi* (nei quali si interseca una famiglia di infinite curve),
- *fuochi* (attorno ai quali le curve si avvolgono come spirali),
- *centri* (attorno ai quali le curve hanno la forma di cicli chiusi).

Sviluppando un'analogia con le carte topografiche proposta dallo stesso Poincaré si può dire che, considerate le linee di livello, che congiungono punti della stessa altitudine, come curve integrali, ovvero soluzioni di una certa equazione differenziale, i picchi e le valli corrispondono ai *centri* (che tuttavia risultano punti singolari del tutto eccezionali in topologia) e i punti di sella della carta sono i *punti di sella* dell'equazione differenziale; se invece si considerano le linee di pendio al posto delle curve di livello si riconoscono i *nodi*, mentre non possono essere rappresentati i fuochi. La conoscenza del sistema topografico costituito dai «punti singolari» (nelle sue quattro possibilità di convergere verso un nodo, di girare indefinitamente intorno a un fuoco, di avvolgersi asintoticamente attorno a un fuoco, di ritornare al punto di partenza convergendo intorno a un centro) permette di riconoscere tutte le forme delle curve definite da una data equazione differenziale.

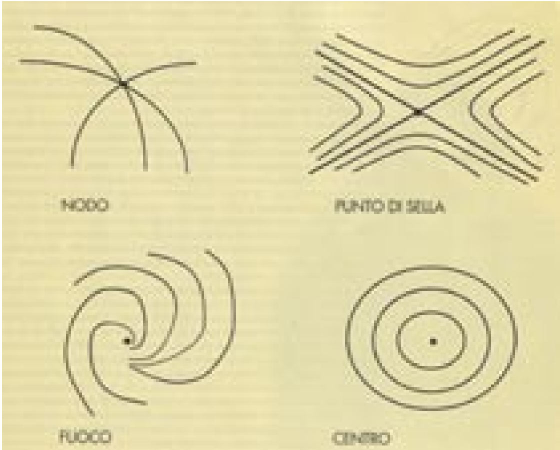

Figura 2 - I quattro punti singolari: nodi, selle, fuochi, centri.

Nel quadro di tale descrizione analitica della topologia algebrica (o *analysis situs*, come veniva allora chiamata) Poincaré dimostra come lo spazio delle posizioni e delle velocità dei tre corpi viene rappresentato da un punto sulla sezione o «piano di Poincaré»: di conseguenza, la successione di punti P_0, P_1, P_2 descrive il comportamento di una traiettoria uscita da P_0; lo studio dei punti di intersezione delle traiettorie con il piano sezione nell'intorno del punto M_0 (fisso perché appartiene a una soluzione periodica) è condotto in analogia con quanto avviene per le soluzioni di un'equazione differenziale del primo ordine nell'intorno dei punti singolari. Nell'analogo dei nodi (topologici) le traiettorie finiranno per avvicinarsi a, o allontanarsi da, C, mentre nell'analogo dei punti di sella alcune traiettorie finiranno per avvicinarsi asintoticamente a C (soluzione asintoticamente periodica), altre si allontaneranno indefinitamente nel futuro e nel passato (soluzione doppiamente asintotica), altre si manterranno a una distanza finita (soluzione periodica).

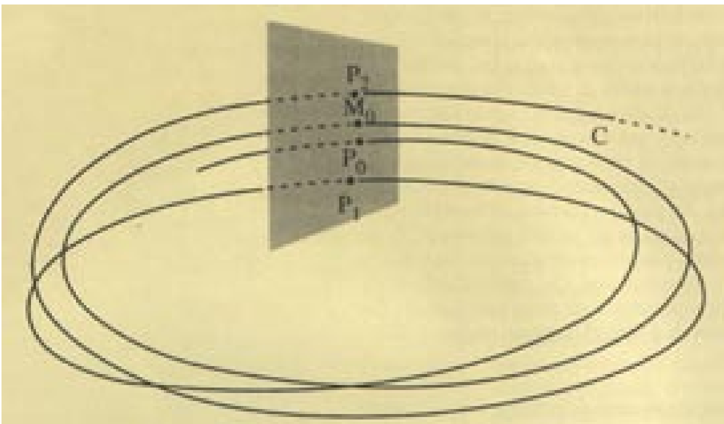

Figura 3 - Traiettorie su un «piano di Poincaré»

La dimostrazione rigorosa del Teorema di ricorrenza[4] definisce la stabilità delle traiettorie, proponendo che infinite soluzioni particolari sono stabili e infinite altre sono instabili.

Studiando le soluzioni periodiche vicine all'instabilità Poincaré si accorge che vi sono soluzioni asintotiche nel futuro (che si avvicinano indefinitamente a C col crescere del tempo e formano una varietà stabile) e soluzioni asintotiche nel passato (che formano una varietà instabile). La scoperta di tali soluzioni doppiamente asintotiche comporta un'elaborazione geometrica estremamente complessa nella quale le superfici S' e S" si tagliano lungo C: tale complessa soluzione geometrica fornisce la prima descrizione di un comportamento caotico in un sistema dinamico.

Viene così, per la prima volta, considerata l'importanza delle condizioni iniziali di un processo in un sistema dinamico e l'esigenza di calcolare esattamente la sua sensibilità alle condizioni iniziali: la teoria dei sistemi dinamici conduce alla nascita della 'geometria' del caos. Oggi si considera *caotico* un sistema dinamico nel quale l'imprecisione con la quale si conosce l'ennesimo termine della serie tende verso l'infinito quando *n* tende all'infinito. Non si può prevedere il comportamento di un tale sistema, in quanto bisognerebbe conoscere il suo stato iniziale con una precisione tanto maggiore quanto è lontano l'orizzonte nel quale si vuole prevedere l'evoluzione del sistema.

Il sistema dinamico caotico fin qui considerato è determinista, ma non è prevedibile. Se ne possono comunque classificare gli stati asintotici (associati a quelli che oggi si chiamano «attrattori strani») e si possono attribuire loro delle probabilità[5].

Soltanto intorno al 1990 si è potuto calcolare con precisione il tempo caratteristico alla fine del quale compare il comportamento caotico dei tre pianeti interni del sistema solare (Terra, Venere, Marte), che va da 10 a 100 milioni di anni: una variazione di un decimiliardesimo nelle condizioni iniziali del loro movimento conduce a due soluzioni che differiscono di un solo miliardesimo dopo 10 milioni di anni, ma del 100% dopo 100 milioni di anni.

Era sconcertante per un fisico-matematico 'classico' quale era ancora Poincaré riconoscere che da un problema di meccanica newtoniana tipicamente deterministico potessero emergere fenomeni caotici, descrivendo rigorosamente l'emergenza di una catena di concatenazioni necessarie a partire da un evento casuale. Lo straordinario viaggio di Poincaré nella complessità delle interazioni delle orbite planetarie conduce alla scoperta di figure di equilibrio e di biforcazione, successivamente studiate nella versione *elementare* della *teoria delle catastrofi*, fondata da René Thom.

Le nuove figure geometriche indagate da Poincaré, come la pseudosfera o il toro, costituiscono oggi le figure di base della geometria contemporanea, come il cubo e il cilindro lo erano per la geometria classica.

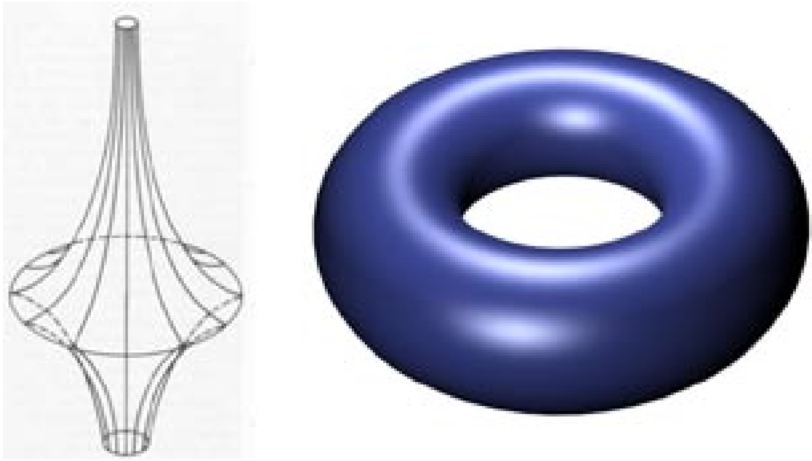

Figura 4 - Pseudosfera e toro.

La pseudosfera è una superficie di rotazione che può essere interpretata come un modello euclideo di geometria non euclidea. Alla superficie Eugenio Beltrami aveva dato il nome di pseudosfera perché ha curvatura costante come una sfera ma di segno negativo. Il toro semplice è una superficie a forma di ciambella. Può essere ottenuta come superficie di rivoluzione, facendo ruotare una circonferenza (la generatrice) intorno a un asse di rotazione, che appartiene allo stesso piano della generatrice, ma che è disgiunto e ortogonale rispetto a questa. Il termine deriva dal latino «torus» che indicava, fra le altre cose, un tipo di cuscino a forma di ciambella.

4. Conseguenze epistemologiche della matematica del «caos»

Quali sono le principali conseguenze epistemologiche ricavabili da queste ricerche fisico-matematiche di Poincaré?

Innanzitutto si dovrà convenire che al di fuori di un insieme discreto di soluzioni periodiche semplici, non esiste in generale una soluzione finitaria effettivamente calcolabile a partire da condizioni iniziali assegnate. Inoltre, la somma dei termini della serie introdotta per approssimare la soluzione, a partire da un certo ordine in poi, si allontana dalla soluzione vera anziché avvicinarsi a essa. L'andamento qualitativo delle traiettorie del sistema, in prossimità di una traiettoria periodica semplice, mostra una transizione continua dal moto regolare e prevedibile della traiettoria periodica di riferimento fino a traiettorie irregolari e caotiche. La caoticità intrinseca nel comportamento di ogni sistema sottoposto all'azione non lineare di forze diventa la norma, mentre la regolarità dei moti dei corpi celesti si rivela un'eccezione. Poincaré ricorda, in definitiva, come da differenze minime nelle condizioni iniziali possono scaturire differenze molto grandi, tali da pregiudicare la stessa possibilità di prevedere l'evoluzione del sistema e da rendere casuale il suo comportamento.

Si tratta della teoria che oggi viene denominata del «caos deterministico» perché i fenomeni possono essere descritti dalle equazioni differenziali della dinamica classica, quelle stesse usate da Laplace e ispirate da Newton; ma la 'determinazione' matematica di un fenomeno non ne garantisce la predizione (le dinamiche di tali fenomeni appaiono dunque 'caotiche' perché non predicibili). Gli studi topologici sul «caos deterministico» definiscono grandezze matematiche che individuano il tipo di *disordine* che si sta studiando, partendo dall'affermazione (proposta per la prima volta da Poincaré) che i vari tipi di disordine non si possono prevedere, ma si possono descrivere e classificare.

In topologia si rinuncia così alle conoscenze geometriche quantitative, come la lunghezza di una curva o la misura degli angoli di un triangolo, ma si conoscono entità che caratterizzano una struttura, gli invarianti topologici (relativi a nodi, fuochi, punti di sella). Nella meccanica classica si descrivono *traiettorie*, mentre in dinamica del caos si studiano *grovigli* di linee riconoscendone le tipologie. La teoria del caos parte da modelli rigorosamente deterministici, da leggi del moto, e tende a determinare alcune caratteristiche del caos, a trovare un ordine nascosto nel disordine, una «struttura ordinata del disordine». Se Poincaré ha scoperto che dall'ordine deterministico si genera il caos, ora con la dinamica del caos si studiano le forme caotiche che producono ordine (dalle reti neuronali ai flussi di popolazione).

Se si volesse individuare un più ampio senso culturale della svolta avviata da Poincaré si potrebbe confrontare l'immagine del mondo da lui proposta con quella di Laplace. Sul piano storico non sarebbe azzardato stabilire una proporzione secondo la quale Cartesio sta a Leibniz, come Laplace sta a Poincaré. Nell'arco di un secolo si passa infatti da un universo semplice a un universo di contingenze e di cammini inattesi. Al determinismo fisico di Cartesio, e al determinismo cosmico di Laplace, Poincaré contrappone superfici topologiche e fenomeni impredicibili. Inoltre, la vicinanza tra Poincaré e Leibniz può essere confermata dalla bella riflessione contenuta nel *Discorso di metafisica* (1686):

> E se qualcuno tracciasse tutta di seguito una linea che fosse ora diritta, ora circolare, ora di un'altra natura, sarebbe sempre possibile trovare una soluzione o regola o equazione comune a tutti i punti di questa linea, in virtù della quale questi stessi cambiamenti debbano accadere. E non c'è, per esempio, alcun volto, il cui contorno non faccia parte di una linea geometrica, e che non possa essere tracciato, tutto in una volta, con un certo movimento regolare. Ma quando una regola è molto complessa, ciò che le è conforme passa per irregolare [6], p. 11.

Ma le intuizioni di Poincaré sul caos deterministico dovranno aspettare più di cinquant'anni per essere sviluppate. Soltanto a partire dal 1954, grazie agli studi della scuola matematica sovietica di Andrej Kolmogorov e George Birkhoff, e all'uso di algoritmi realizzati con la potenza di calcolo dei computer, il problema dell'imprevedibilità nell'evoluzione di un sistema complesso è diventato oggetto di calcolo.

Con l'avvio alla soluzione del problema dei tre corpi il solido edificio ideale eretto da Newton e Laplace comincia a scuotersi e ha inizio la scienza del XX secolo. La «sezione di Poincaré» cosparsa di punti apparentemente senza relazione è la descrizione esatta del nostro spazio, dello spazio-tempo in cui siamo immersi: uno spazio-tempo che ospita traiettorie caotiche, rigorose e deterministe, ma imprevedibili.

Con l'informatizzazione delle matematiche la riflessione sul caos dispone oggi di algoritmi potenti e la matematica si apre a un periodo di interazione con le altre scienze inaugurando una nuova area di ricerca – la matematica del caos – che sviluppa le intuizioni di Poincaré: soltanto gli algoritmi dei calcolatori possono esprimere nei dettagli il mondo intravisto da Poincaré, ai limiti possibili della matematica dichiarativa e del suo rigore. Senza il computer le «dinamiche caotiche» non sarebbero state più studiate. E ciò per i caratteri intrinseci ai sistemi computazionali: a) il computer porta nel cuore dell'apparato matematico quel tipo di approssimazione che era emerso negli strumenti di misura; è un esempio applicato di «caos deterministico». Basta chiedere al computer di tenere conto di un decimale in più o in meno perché appaiano soluzioni del tutto diverse; b) il computer può calcolare un'enorme quantità di soluzioni numeriche approssimate a quelle equazioni cui non sappiamo dare una soluzione analitica.

Laplace voleva costruire un apparato matematico che contenesse tutte le variabili che descrivono l'evoluzione nel tempo di un sistema dato, in modo da poter riconoscere lo stato del sistema in qualsiasi istante successivo, un intelletto «che potrebbe abbracciare in un'unica formula tanto il modo dei più diversi corpi dell'universo quanto quello dell'atomo più leggero» [5], pp. 32-33. Poincaré ha intuito che la non-linearità delle equazioni e il caso possono aprire nuove forme di conoscenza («Può infatti accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali producano un errore enorme in quelle successive» [10], p. 50).

In definitiva, le ricerche di Poincaré dimostrano quanto la sua visione fisico-matematica abbia orientato la sua riflessione sulla scienza: concezione geometrica dell'analisi, espressa nell'attitudine a risolvere i problemi analitici tramite intuizioni geometriche; interpretazione unitaria della fisica matematica; attribuzione alla geometria di un ruolo di connessione tra analisi e fisica.

5. Cenni sulle altre concezioni epistemologiche

All'attualità delle ricerche fisico-matematiche di Poincaré va aggiunto anche il rilievo particolarmente fecondo che hanno avuto le altre sue concezioni epistemologiche. Malgrado Poincaré rimanga uno scienziato militante fino al 1912 (l'ultimo articolo viene pubblicato nel marzo del 1912), egli affronta problemi epistemologici già dal 1887 e la sua produzione epistemologica è legata alla sua produzione scientifica. I problemi epistemologici riguardano soprattutto tre ambiti: la riflessione sulla geometria e, in particolare, sul rapporto fra geometria euclidea e geometrie non-euclidee; la riflessione sulla matematica e sui fondamenti della matematica; l'indagine sulle teorie scientifiche.

Si può parlare senz'altro di un'*epistemologia* o di una *filosofia scientifica* di Poincaré, anche se essa non è il risultato di una produzione teorica preordinata, ma di saggi e articoli sparsi, raccolti successivamente nelle sue quattro opere epistemologiche:

La scienza e l'ipotesi (1902); *Il valore della scienza* (1905); *Scienza e metodo* (1908); *Ultimi pensieri* (1913, postuma)[6]. In queste quattro opere è racchiusa quasi tutta la sua produzione epistemologica e filosofica, che si snoda attraverso un percorso che lo porta dalla filosofia della geometria ai fondamenti della matematica e all'epistemologia della scienza in senso più lato.

L'epistemologia matematica di Poincaré si articola in riferimento all'aritmetica e alla geometria. Il principio fondamentale della sua epistemologia aritmetica è il principio di induzione completa, secondo il quale una proprietà vale per *tutti* i numeri naturali quando si verificano simultaneamente le due seguenti condizioni: essa vale per lo zero ed essa vale per il numero $n + 1$ ogniqualvolta vale per il numero n.

Ciò conduce Poincaré a sostenere che la natura del ragionamento matematico è basata su una «regola, inaccessibile alla dimostrazione analitica e all'esperienza», «un vero tipo di giudizio sintetico *a priori*», che è appunto il principio di induzione completa, «l'affermazione di una proprietà dell'intelligenza stessa» [9], pp. 66-67. Poincaré salva così un assunto del kantismo, cioè la possibilità che l'aritmetica venga ricondotta a un assioma che è proprio del nostro intelletto: l'assioma di induzione completa.

Per la geometria, l'algebra e l'analisi, gli assiomi di riferimento sono quelli che definiscono il concetto di gruppo («Fra le parole che hanno esercitato l'influenza più felice [in matematica], segnalerò *gruppo* e *invariante*» [10], p. 27). La teoria dei «gruppi di trasformazioni» sostiene che, a partire dalle operazioni di un certo gruppo, si possono costruire delle geometrie *caratterizzate* dalle proprietà invarianti delle figure rispetto al gruppo di trasformazioni scelto. La geometria viene così ancorata all'algebra e all'analisi e fa da tramite tra matematica e fisica[7].

La possibilità di un numero variabile di dimensioni nello spazio poggia sul continuo matematico: vi sono quindi varie geometrie possibili. Il concetto di gruppo è innato nella mente, ma non lo è una particolare geometria (come quella euclidea). Il concetto matematico di «gruppo di trasformazioni» può consentire di dare un fondamento virtuale 'innato' allo spazio geometrico.

Il matematico costruisce la sua geometria come un ingegnere, a partire però da una struttura potenziale dell'intelletto che è propria di tutti gli uomini. La creatività del matematico risiede nella capacità di costruire teorie nuove, a partire da quella struttura, cioè, da un gruppo di trasformazioni. Ma il gruppo di trasformazioni che costituisce la geometria euclidea è il più semplice perché applicabile ai movimenti fisici dei corpi solidi ordinari, su scala mesoscopica.

È appena il caso di ricordare che proprio lo studio dei gruppi di trasformazioni aveva permesso a Poincaré (come si è visto) di stabilire un diretto rapporto tra continuo geometrico e fisico e di fondare la topologia algebrica. Si potrebbe dire che la sua epistemologia geometrica viene smentita dalle sue ricerche di topologia algebrica che – oltrepassando la contrapposizione tra geometria euclidea e non euclidea – aprono alla visione degli spazi complessi.

Gli assiomi di induzione completa e di gruppo sono costitutivi da un lato dell'aritmetica e dall'altro, dell'analisi e della geometria. In questo modo Poincaré si muove all'interno di una prospettiva ancora kantiana. In un certo senso, si può dire che questi assiomi prendono il posto delle categorie della kantiana analitica trascendentale (mentre per Kant il fondamento dell'aritmetica e della geometria risiedeva nelle intuizioni a priori di spazio e tempo dell'estetica trascendentale), anche se Poincaré introduce un elemento di convenzionalità, con l'affermazione che c'è una libertà costruttiva del matematico che, partendo da questi assiomi, può creare, ad esempio, diverse geometrie non euclidee.

In definitiva, esiste per Poincaré un'oggettività scientifica, anche se si tratta di un'oggettività che non si fonda sulla conoscenza di un singolo fatto, del dato sperimentale preso in sé (che chiama «fatto bruto»), ma sulla conoscenza del sistema di relazioni che regola i dati sperimentali. Questo sistema di relazioni per Poincaré è sostanzialmente costruito dalla matematica. In tale oggettività risiede il valore della scienza (*La valeur de la science* è stato un libro molto letto, anche fuori dalla Francia, è stato il primo *bestseller* di letteratura scientifica), perché la scienza possiede la capacità di pervenire a un sistema di conoscenze oggettive sulle relazioni dei fenomeni e questa capacità è ciò che la distingue da altri linguaggi, da altre forme di creatività.

Poincaré non è un convenzionalista estremo o radicale come volevano alcuni interpreti. Sostanzialmente, le tesi di Poincaré sono contrarie all'empirismo e al positivismo e risentono di un kantismo abbastanza diffuso nella cultura francese di fine Ottocento e di inizio Novecento. Esse ebbero un largo influsso nella riflessione novecentesca sulla scienza.

È interessante ricordare, al proposito, che *La valeur de la science* fu, fuori della Francia, il punto di coagulo dell'empirismo logico. Sappiamo che la prima fase dell'empirismo logico risale al 1907, quando, a Vienna, giovani studiosi come Otto Neurath, Hans Hahn e Philip Frank si ritrovano a discutere dei problemi legati alla fondazione delle scienze e leggono *La valeur de la science* e le altre opere epistemologiche di Poincaré, insieme a quelle di altri grandi scienziati come Ernst Mach. Frank, uno dei primi protagonisti dell'empirismo logico, sosterrà che l'empirismo logico ha composto insieme, il principio di economia machiano e il costruttivismo convenzionale di Poincaré:

> Mi accorsi ben presto che qualsiasi problema nella filosofia della scienza doveva consistere nella elaborazione di una teoria, in cui le idee di Mach e Poincaré fossero due aspetti speciali di una visione più generale. Per compendiare queste due teorie in una sola frase, si potrebbe dire che secondo Mach i principi scientifici generali sono descrizioni economiche abbreviate di fatti osservati; secondo Poincaré sono libere creazioni della mente umana che non dicono nulla intorno ai fatti osservati. Il tentativo di integrare i due concetti in un sistema coerente fu l'origine di ciò che più tardi venne definito empirismo logico … [3], p. 26.

In altri termini, Poincaré viene visto come uno dei padri fondatori dell'empirismo logico.

Spero di aver fornito utili elementi per comprendere l'importanza del pensiero di Poincaré oggi, sia sul piano matematico, che su quello epistemologico, e per invitare a una lettura dell'opera dell'«ultimo grande scienziato universale» (J. Vuillemin).

NOTE

[1] Intuitivamente una superficie è semplicemente connessa nel caso in cui ogni curva chiusa tracciata sulla superficie può essere deformata con continuità fino a ridursi a un punto.

[2] Una tra le presentazioni divulgative più esaurienti della vita e dell'itinerario di ricerca di Poincaré in [1].

[3] La commissione giudicatrice internazionale era composta da tre matematici di grande momento: Gösta Mittag-Leffler di Stoccolma, Karl Wierstrass di Berlino ed Charles Hermite di Parigi. Un'accurata presentazione del problema e delle soluzioni offerte da Poincaré si trova in [13], pp. VII-L.

[4] Secondo il teorema di ricorrenza per ogni regione dello spazio, comunque piccola, ci sono traiettorie che l'attraversano un'infinità di volte, di modo che in qualche tempo futuro, e per un'infinità di volte, il sistema ritornerà arbitrariamente vicino alla sua situazione iniziale.

[5] Un esempio di sistema dinamico caotico è il movimento di un dado, che è imprevedibile, ma le cui posizioni all'infinito sono le sei facce del dado stesso, i sei «attrattori strani» del sistema, a ciascuno dei quali si può attribuire una probabilità di 1/6.

[6] Su questi aspetti cfr. anche [2] e [15].

[7] «Sembra che la geometria non possa contenere niente che non sia già contenuto nell'algebra o nell'analisi; che cioè i fatti geometrici non siano altro che fatti algebrici o analitici espressi in un altro linguaggio» [10], p. 31.

Bibliografia

[1] Bottazzini, U., Poincaré: il cervello delle scienze razionali, *Le Scienze*, II, n. 7, febbraio 1999.

[2] Fortino, M., *Convenzione e razionalità scientifica in Henri Poincaré*, Rubbettino, Soveria Mannelli 1997.

[3] Frank, Ph., *La scienza moderna e la sua filosofia* (1961), a cura di M. C. Galavotti, il Mulino, Bologna 1973.

[4] Koyré, A., *Dal mondo chiuso all'universo infinito* (1957), Feltrinelli, Milano 1979^3 (prima ed. it. 1970).

[5] Laplace de, P. S., *Essai philosophique sur les probabilités* (1825), Ch. Bourgois, Paris 1986.

[6] Leibniz, G. W., *Discorso di metafisica* (1686), a cura di A. Sani, La Nuova Italia, Scandicci (FI) 1992.

[7] Parisi, G., *La chiave, la luce e l'ubriaco. Come si muove una ricerca scientifica*, Di Rienzo, Roma 2006.

[8] Poincaré, J. - H., *Œuvres*, 11 voll., Gauthier-Villars, Paris 1916-1956.

[9] Poincaré, H., *La scienza e l'ipotesi*, in Id., *Opere epistemologiche*, a cura di G. Boniolo, Piovan Ed., Abano Terme 1989, vol. I, pp. 51-234.

[10] Poincaré, H., *Scienza e metodo*, in Id., *Opere epistemologiche*, a cura di G. Boniolo, Piovan Ed., Abano Terme 1989, vol. II, pp. 5-197.

[11] Poincaré, J. H., *Scritti di fisica-matematica*, a cura di U. Sanzo, UTET, Torino 1993.

[12] Poincaré, J. H., *Il valore della scienza*, a cura di G. Polizzi, La Nuova Italia, Scandicci (Firenze) 1994.

[13] Poincaré, H., *Geometria e caso. Scritti di matematica e fisica*, a cura di C. Bertocci, Bollati Boringhieri, Torino 1995.

[14] Poincaré, H., *La scienza e l'ipotesi*, a cura di C. Sinigaglia, Bompiani, Milano 2003.

[15] Sanzo, U., *Poincaré e i filosofi*, Milella, Lecce 2000.