A PROPOSITO DELLA LOGICA: SUL CONCETTO D'INFERENZA*

ANDREA CANTINI

Dipartimento di Filosofia, Università degli Studi di Firenze

Mein teurer Freund, Ich rat Euch drum
Zuerst Collegium Logicum[1].

(Goethe, Faust)

1. Prologo

Ci sono delle aspettative del senso comune intorno alla logica che non sono affatto giustificate dalla ricerca contemporanea; metterne subito in discussione un paio (che cosa *non* è la logica, dunque) ci sembra il modo più opportuno per iniziare il nostro breve discorso.

In primo luogo, si tende a credere ancora oggi che la logica sia una *disciplina statica*, con un ambito di studio ben determinato, strumento per eccellenza della razionalità. In realtà, il termine 'logica' è ambiguo: occorre in contesti disparati e possiede, anzi, un carattere *pervasivo* (basta prendere in considerazione le locuzioni «è logico fare così e così», «la logica dello sviluppo», «la logica dei calcolatori», «la logica del racconto»; che parentela c'è fra questi termini?). Per questo la natura della logica è profondamente *elusiva.* Secondo la tradizione, la logica fa parte (come dialettica) delle arti del trivio assieme alla retorica e alla grammatica; rientra quindi a pieno diritto fra le discipline del linguaggio e quindi umanistiche. D'altra parte, a partire dalla seconda metà dell'Ottocento, la logica viene matematizzata (si pensi all'opera di George Boole) e agli inizi del secolo successivo interagisce profondamente con le ricerche sui fondamenti della matematica (Frege, Russell, Hilbert, etc.). Oggi è difficile interessarsi di logica a livello di ricerca senza avere preso contatto anche con problematiche che sono state suggerite da questioni d'informatica teorica.

Ad ulteriore conferma del carattere non monolitico della disciplina, si ricorderà che le verità della logica hanno la fama di essere non-informative, prive di contenuto empirico (sono 'tautologie' e il termine ha una connotazione negativa nel linguaggio comune); eppure, come avremo modo di richiamare oltre, non esistono principi logici fra quelli considerati più ovvi (principio di non-contraddizione, terzo escluso, etc.), che non siano stati messi in discussione nel corso del XX secolo.

In secondo luogo, si è portati a pensare che la logica sia una sorta di scienza delle scienze; eppure, come è comprovato dalla storia della logica del secolo scorso, la logica *non è indipendente* dagli enti e dalle strutture degli enti ai quali la si applica. Di fatto, la logica non fornisce una teoria unitaria dell'inferenza razionale, semmai fornisce un sistema di concetti e strumenti che permettono di costruire modelli rigorosi di vari tipi di inferenza e dei concetti di interpretazione, dimostrazione, regola. In logica, come in altre discipline astratte, ha un ruolo non indifferente il momento della libera costruzione di modelli, degli esperimenti ideali, del congetturare.

Se si accentua troppo la soluzione di continuità fra l'immagine tradizionale della logica e gli sviluppi recenti, si corre però il rischio di avvicinarsi alla logica in una ottica puramente 'modernista', e di trasferire al lettore – per avviarlo agli sviluppi tecnicamente avanzati – le solite informazioni drammatiche e drammatizzanti (ma ormai un po' trite, non di rado scorrette) sui teoremi di Gödel, i limiti della ragione, etc., dimenticandosi del fatto che la logica fino da Aristotele ha avuto tra i suoi fini precipui quello di essere una *teoria dell'inferenza corretta.*

Sarebbe dunque auspicabile che una persona colta avesse un'idea precisa di che cosa significa che un ragionamento è corretto (o cogente o logicamente valido). Un professore di liceo di filosofia e/o di matematica potrebbe porsi il minimale obiettivo di insegnare ai propri allievi che cosa è un'inferenza corretta (magari riferendosi al solo livello proposizionale).

In quel che segue discuteremo dunque il problema dell'inferenza. Può sembrare fuori tema, visto che il colloquio è dedicato alla filosofia della matematica. Non lo è, perché centrale è il concetto di dimostrazione nella conoscenza matematica: dove di norma si accetta come vero un enunciato (che non sia assunto come principio o assioma), solo se si dispone di una prova o dimostrazione. Se ci domandiamo che cosa è una dimostrazione, osserviamo che, accanto alle costruzioni e alle inferenze specificamente matematiche (che dipendono dal contenuto matematico che si vuol accertare), figurano nella prova impliciti alcuni passaggi elementari non ulteriormente analizzabili che non sono di natura specificamente matematica, nel senso che si ritrovano anche in molti altri ambiti[2], e che dipendono in certa misura dalla struttura linguistica di ciò che vuol provare (se si tratta ad esempio di un enunciato condizionale, o universale, etc. si veda il paragrafo successivo).

2. Forma logica e livelli logici

Sulla base delle precedenti considerazioni, possiamo partire da un primo rozzo tentativo di definizione della disciplina: la logica elabora informazioni espresse in forma linguistica, dove 'elaborare' significa costruire *argomenti logicamente corretti*. Un argomento è costituito da vari enunciati legati fra loro da nessi che sono detti *inferenze* e che devono risultare, se l'argomento è cogente, corrette. Dobbiamo dunque rispondere alla domanda: che cosa intendiamo per inferenza corretta? Questo è il compito principale della logica come teoria della deduzione: si tratta di classificare, se possibile completamente[3] e secondo i vari ambiti, le inferenze corrette.

Per spiegare che cosa è un'inferenza logica, bisogna afferrare il concetto di *forma o struttura logica.* La difficoltà maggiore è che la forma logica è diversa da quella grammaticale e che il processo di distinzione della dimensione logica specifica dalle consorelle del trivio – grammatica e retorica – avviene lungo l'arco di un processo storico molto complesso e lungo nel tempo.

La via più semplice per spiegare che cosa intendiamo quando si parla di forma logica, è rivolgersi a degli esempi, come faceva anche Sesto Empirico (III secolo d.C.) e prima di lui i filosofi e logici della scuola megarico-stoica[4].

Si consideri il seguente argomento 'in miniatura':

1. è giorno oppure notte
2. non è giorno
3. Dunque è notte

Si concederà di sicuro che è banalmente corretto il passaggio dagli enunciati 1 e 2 (le premesse) all'enunciato 3 (la conclusione). Pragmaticamente, se si assumono 1-2, siamo costretti ad accettare 3, non potremo non accettare anche 3.

Chiediamoci ora perché. Una prima risposta si basa sull'effettuare una sorta di variazione nella figura inferenziale, alterandone il contenuto: osservo che se sostituisco agli enunciati A=«è giorno», B=«è notte» enunciati qualsivoglia ma lascio fisse le particelle 'o', 'non', il passaggio rimane intuitivamente valido. Viene dunque il sospetto che le ragioni per cui l'inferenza è corretta vadano cercate nel *permanere* delle due particelle, i connettivi 'o' (disgiunzione) e 'non' (negazione). Lo schema sotteso alla regola, detta del *sillogismo disgiuntivo*, è

$$\text{A o B, non A} \Rightarrow \text{B}$$ [5]

e rappresenta la *forma logica* dell'inferenza, la cui correttezza viene a dipendere *solo dal significato della disgiunzione 'o' e della negazione 'non'*. Dunque, spiegare una inferenza logica vuol dire impegnarsi a discutere il significato dei connettivi logici.

Ovviamente, 'o', 'non' non sono gli unici connettivi. Il connettivo più importante è senz'altro il condizionale (o implicazione) 'se …, allora …' (simbolizzato da una freccia $\rightarrow$) : con esso si formano enunciati che non hanno tanto il fine di descrivere situazioni più complesse a partire da costituenti dati, ma di esprimere il darsi di certi fatti, *nell'ipotesi* che si verifichi una data condizione. Il condizionale è dunque un modo privilegiato con cui il linguaggio incorpora una sorta di dimensione ideale, astratta; una volta inglobato il momento ipotetico, non è più un mero strumento di descrizione della realtà di fatto, ma diviene strumento per fissare scenari possibili o fantastici.

Vediamo subito una celebre quanto semplice regola che coinvolge il condizionale. Si consideri

1. se è giorno, allora c'è luce
2. non c'è luce
3. dunque non è giorno.

Lo schema sotteso dall'inferenza, detto del *modus tollens*, è allora: $A \rightarrow B$, *non* $B \Rightarrow$ *non*

A. Di nuovo, possiamo convincerci della sua validità adottando la consueta strategia della sostituzione. Per converso, se considerassimo lo schema

$$A \rightarrow B, \text{ non } A \Rightarrow \text{ non } B,$$

avremmo ancora una regola corretta? No, perché potremmo scegliere la seguente istanza dello schema:

1. se Petrarca è fiorentino, Petrarca è toscano
2. Petrarca non è fiorentino
3. dunque Petrarca non è toscano.

Ora le premesse sono vere, la conclusione falsa; ma un'inferenza logica deve per sua natura essere sempre vera, qualunque sostituzione si metta in atto. Dunque lo schema

$$A \rightarrow B, \text{ non } A \Rightarrow \text{ non } B$$

non corrisponde ad un'inferenza corretta (costituisce una fallacia).

Un altro esempio senza commento:

1. se aumenta il prezzo della benzina, allora cresce l'inflazione
2. se cresce l'inflazione, diminuisce il potere d'acquisto degli stipendi
3. dunque se aumenta il prezzo della benzina, diminuisce il potere d'acquisto degli stipendi.

Ovviamente la forma logica corrispondente sarà quella del cosiddetto *sillogismo ipotetico*:

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$$

Passiamo ora ad un altro esempio che racchiude delle differenze sostanziali con i precedenti perché ci porta ad estendere considerevolmente l'analisi logica, introducendo nuove operazioni che non si limitano, come i connettivi, ad operare su enunciati per produrre nuovi enunciati. L'esempio corrisponde ad un sillogismo di seconda figura (CESARE)[6]:

1. nessun parlamentare è disonesto;
2. tutti i filosofi sono disonesti;
3. dunque nessun filosofo è parlamentare

Qui la forma logica è più ardua da scoprire; essa coinvolge i cosiddetti 'quantificatori' corrispondenti a termini come 'tutti', 'ogni, 'nessuno', 'qualche'.
Il sillogismo si lascia trasformare come segue:

1. (per ogni x)(x è parlamentare → non è vero che x non è onesto)
2. (per ogni x)(x è filosofo → x non è onesto)
3. (per ogni x)(x è filosofo → non (x è parlamentare))

Facendo astrazione dagli specifici predicati usati, lo schema corrispondente a 1a)-3a) diventa

i (per ogni x)(Px → non(non Mx))

ii (per ogni x)(Sx → non Mx)

iii (per ogni x)(Sx→non Px)

Le operazioni logiche '(per ogni *x*)', '(esiste un *x*)' sono dette *quantificazioni elementari* o del primo ordine, la prima universale e la seconda esistenziale. Esse diventano strumento essenziale per analizzare enunciati che coinvolgono relazioni anche molto complesse, in particolare gli enunciati matematici. Un esempio, che coinvolge il concetto d'infinito, ne potrà illustrare al meglio la potenza e la flessibilità. Si pensi alla fondamentale proposizione di Euclide secondo la quale esistono infiniti numeri primi. Assunti due predicati *Num(x)* e *Prim(x)* per esprimere le proprietà di essere numero naturale e numero primo (rispettivamente), nonché un predicato binario '<' per rappresentare la consueta relazione d'ordine sui naturali, l'infinità dei primi si lascia allora formalizzare mediante un enunciato che richiede entrambi i tipi di quantificazione:

(per ogni x)(Num(x) e Prim(x) →(esiste y)(Num(y) e Prim(y) e x<y))

Ovviamente, questo è solo l'inizio della teoria della quantificazione, uno dei capitoli centrali della logica contemporanea. A questo proposito, va ricordata la distinzione fondamentale fra la *quantificazione su individui* o oggetti logici (come negli esempi precedenti) e la *quantificazione su proprietà, relazioni*, etc., che caratterizza la logica del second'ordine. La possibilità di quantificare su proprietà, relazioni, insiemi, etc. potenzia notevolmente gli strumenti definitori ed inferenziali della logica. Basti ricordare qui che il progetto logicista nell'ambito della filosofia della matematica (legato alle figure di Frege e Russell, e di recente ripreso con un qualche successo), cioè l'idea che tutte le verità aritmetiche siano riconducibili a verità logiche, richiede essenzialmente una strumentazione logica del secondo ordine.

Inoltre, la stessa relazione d'identità fra individui si lascia definire mediante la logica del secondo ordine sfruttando *il principio leibniziano d'identità degli indiscernibili*, in base al quale, se due individui *a* e *b* hanno le stesse proprietà (sono cioè indiscernibili), allora sono uguali. Formalmente, *a=b* può essere considerato sinonimo della frase del secondo ordine:

(per ogni proprietà P)(a gode di P ↔ b gode di P)

3. Dalla forma logica alla semantica

Fin qui ci siamo limitati ad estrarre la forma logica delle regole e degli enunciati e a giustificarne la validità in conformità ad un richiamo informale alla tecnica della variazione. Per enucleare il concetto di forma logica e accettare o no un'inferenza logica, abbiamo visto essere fondamentale il significato attribuito alle particelle logiche, in primo luogo ai connettivi. Di tale significato abbiamo dato una versione intuitiva che forse ora conviene fissare un po' più da vicino e con riferimento alla sola concezione classica.

L'interpretazione tradizionale assegna agli enunciati dichiarativi semplici uno stato di verità ed uno solo, fra i due possibili del vero e del falso; i connettivi sono allora da interpretarsi come funzioni di verità che permettono di costituire nuovi enunciati, il cui valore resta determinato esattamente dai valori dei rispettivi enunciati costituenti. Basterà soffermarsi un attimo sulla negazione e la congiunzione. La negazione funziona come un'operazione di scambio: trasforma un enunciato vero in uno falso e viceversa; la congiunzione produce invece un enunciato che è vero se e solo se i suoi due costituenti (i congiunti) sono veri. Ciò basta, per esempio, a stabilire che una congiunzione in cui uno dei congiunti è falso è falsa.

Da un punto di vista combinatorio, si può provare in generale che la nostra scelta non è per nulla arbitraria[7] o casuale: sorprendentemente, qualunque connessione fra enunciati bivalenti (o veri o falsi) che opera come una funzione di verità,[8] si lascia definire mediante le due operazioni sopra viste, qualunque sia il numero dei suoi componenti (questa asserzione è una versione del cosiddetto teorema di completezza funzionale dimostrato da Emil Post agli inizi degli anni Venti).

Se la logica classica si basa sull'idea che gli enunciati si trovano sempre in uno stato definito di verità, altrettanto cruciale nella concezione tradizionale della verità è l'idea che gli enunciati risultano veri quando corrispondono ai fatti, e sono falsi altrimenti. La 'corrispondenza ai fatti' è una relazione non facile da precisare, filosoficamente problematica, ma intuitivamente richiede questo: deve essere dato una sorta di sistema di riferimento – o, come si dice tecnicamente, una *realizzazione* del linguaggio in cui si lasciano esprimere i concetti base del nostro universo del discorso – rispetto al quale i termini del discorso hanno un significato non ambiguo. Se uso un nome proprio, per es. 'Gianni', deve essere chiaro a quale individuo mi sto riferendo (per es. il mio gatto, o l'amico di mio figlio, etc.); se considero un predicato per es. 'alto' deve essere data la sua estensione (ovvero deve essere determinato di ogni individuo del mio universo se posso attribuirgli o no la proprietà espressa dal predicato in questione); di una relazione binaria, infine, deve essere determinato fra quali coppie ordinate di individui essa sussista, etc. Rispetto a una data realizzazione, ogni enunciato risulta allora perfettamente determinato nel suo valore di verità.

Sistematizzando queste idee e sviluppando la cosiddetta semantica di Tarski[9], si lascia definire allora il fondamentale concetto di *conseguenza logica* come relazione semantica fra un enunciato A e un insieme T di enunciati: A segue logicamente da T se e solo se A è vero in ogni realizzazione che è modello di T (ovvero verifica simultaneamente tutti gli enunciati di T). Ciò fissa l'intuizione secondo la quale il legame di consequenzialità fra A e T comporta la non-esistenza di un 'mondo possibile' che verifica le leggi di T, ma falsifica A.

Con la definizione della consequenzialità logica, anche la teoria classica dell'inferenza trova, infine, un suo preciso fondamento semantico: corrette sono quelle inferenze le quali garantiscono che la conclusione è conseguenza logica delle premesse.

4. Sui limiti della logica classica

Naturalmente, l'edificio concettuale delineato riposa sulle ipotesi semplificatrici della concezione classica, i cui problemi risultano evidenti quando si considerano asserzioni che coinvolgono la dimensione temporale. Celebre il problema dei futuri contingenti, già discusso da Aristotele nel capitolo 9 del *De Interpretatione.* Si prenda l'enunciato *A*:= «Domani ci sarà una battaglia navale». Se vale il principio della bivalenza, si potrebbe argomentare come segue: o *A* è vero e allora è già determinato il fatto descritto da *A* (dunque accadrà necessariamente), oppure è falso e pertanto è già determinato che il fatto non accadrà e dunque necessariamente non accadrà. Ma tutto questo sembra implicare il fatalismo. Ripetendo un ragionamento analogo, o domani passerò l'esame oppure fallirò; mi posso mettere l'animo in pace, dato che l'esito dell'esame è già determinato; posso dunque anche evitare di fare tardi a studiare e andare a divertirmi; non cambia nulla se è destino che passi l'esame. Una possibile soluzione consiste nell'arricchire l'analisi logica, facendo intervenire nell'argomento le cosiddette modalità «è necessario che… », « è possibile che… ». Si tratta di osservare che un conto è affermare che *necessariamente* o si dà *A* oppure non si dà *A*, un conto affermare invece che o necessariamente si dà *A* oppure necessariamente non si dà. Il fatalismo emerge solo se si confondono i due enunciati e si assume indebitamente che la necessità – intesa come operatore enunciativo per il quale si adotta il simbolo $\Box$ – preservi la disgiunzione, ovvero se si assume la validità di

$$\Box\ (\text{A o non-A}) \rightarrow \Box\text{A o } \Box\ (\text{non-A}),$$

pur accettando la direzione opposta della medesima implicazione.

Naturalmente questo è solo un assaggio superficiale di una problematica assai intricata, e non è l'unica via: si può – come suggerito dal logico polacco Jan Lukasiewicz (1878-1956) – optare per una teoria in cui i possibili stati di verità degli enunciati sono addirittura infiniti e hanno una struttura continua (per es. corrispondono ai numeri reali compresi fra 0 e 1). La logica ad infiniti valori ha avuto una grande ripresa in anni recenti a partire dagli anni Ottanta del secolo scorso, e di essa sono emerse importanti connessioni con parti avanzate della matematica.

È da rilevare che nel caso della logica a infiniti valori vengono meno i due principi cardine della logica aristotelica, cioè il principio del terzo escluso, la stessa legge di non-contradizione non(*A* e non-*A*), nonché la cosiddetta legge di contrazione

$$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

che afferma operativamente: non conta quante volte si usa una data premessa in un argomento.

Nella direzione di una critica della logica classica, può essere utile richiamare un altro caso, il quale mostra come la situazione, anche a livello di linguaggi naturali, possa essere assai intricata.

Si consideri la seguente inferenza:

1. Se piove, prendo l'ombrello.

2. Se piove, indosso l'impermeabile;

3. Dunque, se piove, prendo ombrello e indosso l'impermeabile.

Essa è corretta e si lascia senz'altro trasformare nella regola, apparentemente innocua e accettabile universalmente:

$$\text{da } C \rightarrow A \text{ e } C \rightarrow B \text{ inferisci } C \rightarrow (A \text{ e } B).$$

Eppure non è così. Infatti, posso immaginarmi un controesempio, vale a dire una situazione nella quale valgono le premesse, ma fallisce la conclusione. Basterà scegliere *C* = «Ho 0.90€», «*A* = Compro Le Figaro», «*B* = Compro Le Monde»; allora potranno valere le due premesse, ma in tal caso è assai dubbio che valga la conclusione, cioè che, se ho solo 90 centesimi di euro, acquisti entrambi i giornali[10].

Un altro ambito nel quale la concezione classica deve essere integrata o rivista è quello del ragionare su concetti vaghi, per esempio quelli che corrispondono ad aggettivi come 'grande', 'piccolo'. Seguendo Eubulide di Mileto (IV sec.d.C), basterà menzionare il paradosso del Sorite (soròs= mucchio), che procede dalle seguenti premesse: (i) un singolo granello di sabbia non fa un mucchio di sabbia; (ii) l'aggiunta di un granello di sabbia ad un insieme di granelli che non costituiscono un mucchio, non lo trasforma in mucchio. Dunque: 2 granelli non fanno un mucchio; 3 granelli non fanno un mucchio,… Andando avanti così, siamo condotti alla indesiderata conclusione che neanche una collezione di un numero arbitrariamente grande di granelli costituisce un mucchio.

Tralasciando la discussione di possibili soluzioni, concludiamo ricordando che la logica classica può essere radicalmente criticata se si aderisce ad una interpretazione del significato dei connettivi logici in termini di asseribilità, secondo la quale non sono tanto le condizioni di verità di un enunciato che contano: si deve sapere che cosa conta come prova (evidenza) di *A* per avere diritto di asserire *A*. Questo atteggiamento porta ad una radicale reinterpretazione epistemica delle operazioni logiche: così, al fine di affermare $A \rightarrow B$, deve essere dato un metodo che permette di trasformare ogni prova di *A* in una corrispondente prova di *B*; l'asserzione di *non-A* richiede che si disponga di un metodo che trasforma ogni prova di *A* in una prova dell'assurdo, mentre una disgiunzione richiede una prova del primo disgiunto oppure una del secondo.

Non sarebbe allora difficile provare che la classica legge della doppia negazione (*non-non-A* $\rightarrow$ *A*), non vale sotto questa interpretazione: infatti, se si giunge ad un assurdo assumendo che una prova di *A* implichi una contraddizione, non per questo si può concludere di avere una prova di A stessa. Inoltre, il terzo escluso non vale universalmente: accettare *A oppure non-A* comporta che si disponga di una prova di *A* oppure di una prova della sua negazione; che è come sostenere, di fronte a un qualsiasi problema (codificato da) *A*, che dovrebbe essere sempre possibile risolverlo.

Se si aderisce a questa teoria del significato degli operatori logici, si è inevitabilmente condotti a una revisione critica dei fondamenti della matematica, revisione che apre un affascinante campo di ricerca noto come *intuizionismo*, legato al nome del grande matematico olandese L. J. E. Brouwer (1887-1963) e in tempi a noi più vicini alla riflessione del logico e filosofo di Oxford Michael Dummett e allo sviluppo della teoria costruttiva dei tipi del logico e matematico svedese Per Martin-Löf.

5. Completezza e complessità logica

Da queste considerazioni sommarie dovrebbe emergere quanto sia azzardato irrigidire la concezione della logica negli stereotipi tradizionali e come vi sia al contrario un ampio spazio di problematizzazione e di arricchimento su specifici temi di ricerca, di cui non possiamo ovviamente dar conto in questo contesto.

Possiamo tuttavia concludere riallacciandoci brevemente al tema iniziale della completezza, che ci porta a convergere sulla figura e l'opera di Kurt Gödel. È possibile fornire un *metodo effettivo*[11] per catturare tutte e sole le inferenze logicamente corrette (modulo una prefissata nozione di correttezza logica) o – più in generale – esiste un metodo effettivo per generare esattamente le conseguenze logiche di un dato insieme di assiomi?

Conviene subito ribadire che la risposta dipende dal tipo di strumento adottato per fissare l'analisi formale: è fondamentale il livello logico al quale si situa l'indagine. Un conto è lavorare al livello enunciativo della logica, facendo uso dei soli connettivi proposizionali classici; un conto è ragionare con la logica elementare che è caratterizzata dall'estensione del momento enunciativo con i quantificatori su individui, o addirittura mediante la logica del secondo ordine in cui si quantifica su proprietà e relazioni arbitrarie.

Ora al problema della completezza si dà soluzione positiva agli inizi degli anni Venti (con Hilbert, Bernays e Post) nel caso della logica proposizionale classica e nove anni dopo, nel caso della logica elementare, con il teorema fondamentale contenuto nella tesi di dottorato di Kurt Gödel.

Un fatto essenziale forse non abbastanza sottolineato – sia per il suo rilievo tecnico specifico sia per il suo profondo interesse concettuale – è che il metodo effettivo che permette di generare le conseguenze logiche di una data teoria (enunciativa o elementare) *è semplicemente una versione formale e rigorosa del classico metodo assiomatico* (o ipotetico-deduttivo), che trae le sue compiute radici dagli *Elementi* di Euclide (vissuto ad Alessandria attorno al 300 a. C.) e matura in tutta la sua potenza nell'Ottocento, in particolare nelle mani degli studiosi di geometria. In altri termini: la logica del Novecento offre una risposta del tutto originale al problema del perché si debba rigorosamente assiomatizzare una teoria T, in altre parole perché ciò implica l'esistenza di un programma (in senso tecnico) che genera meccanicamente tutte le conseguenze logiche di T.

In sostanza: dai risultati di Gödel e Turing degli anni Trenta segue che le procedure assiomatiche sono da sussumersi sotto la specie delle procedure effettive, e che la costruzione di teorie può essere assimilata alla costruzione di algoritmi o programmi per produrre meccanicamente conoscenze.

Dunque una meccanizzazione della conoscenza e la realizzazione del sogno leibniziano? Nient'affatto: i risultati d'incompletezza di Gödel mostrano che vi è un nuovo protagonista nella riflessione teorica logico-matematica, la *complessità logica*. Infatti, la meccanizzazione della relazione di conseguenza logica funziona per i primi livelli, ma *non* funziona per livelli superiori e in particolare quando si voglia meccanizzare la nozione di verità aritmetica anche solo elementare, o nel caso della logica del secondo ordine. Il punto è che il concetto di verità aritmetica elementare risulta radicalmente più complesso (in un senso rigorosamente precisabile) di quello di dimostrabilità.

Come la forma logica ci ha fornito all'inizio di questo discorso un modello per giustificare le inferenze logiche corrette, è ancora l'analisi della struttura logica, in un senso più raffinato e pregnante, che ci dà la chiave per cogliere la profonda differenza fra i concetti di base – verità e dimostrazione – della logica, e per avvicinarci ai grandi risultati d'incompletezza.

Note

[*] Questo contributo è una sorta di sommario di temi che sono stati toccati nell'incontro del 27 ottobre svoltosi a Prato nell'ambito di Pianeta Galileo 2005. I temi sono enunciati e schizzati, mai sviluppati o approfonditi. Si spera che questo stile di presentazione possa servire di stimolo ad approfondimenti autonomi. Di fatto, mi sono rivolto agli studenti senza seguire un testo scritto. La conclusione è che il testo qui presentato è ortogonale a una presentazione accademica in senso stretto ed intende rendere lo stile colloquiale adottato durante l'incontro.

[1] È il consiglio che Mefistofele, che ha momentaneamente preso il posto del professor Faust, dà a uno studente: «Mio caro amico, vi consiglio pertanto e in primo luogo il corso di logica » (cito da: W.J.Goethe, *Faust e Urfaust*, trad.it. e cura di G. Amoretti, Milano 1965).

[2] In tutti quegli ambiti dell'attività pratica e teorica in cui ci serviamo di argomentazioni al fine di accettare determinate conclusioni; si pensi paradigmaticamente all'ambito della giurisprudenza, ma anche alle argomentazioni di un filologo che sta costruendo una edizione critica; o a quelle di un clinico che elabora certe evidenze empiriche per giustificare una data diagnosi.

[3] Senza ometterne alcuna e dandone una descrizione esaustiva ed effettiva.

[4] Ricordiamo qui solo il nome di Diodoro Crono per la scuola megarica, e quelli di Zenone di Cizio e Crisippo per la logica stoica (tutti vissuti fra il IV e il III secolo a.C.).

[5] Da leggersi semplicemente come: da A oppure B e non A, concludo B.

[6] Non ci soffermiamo qui sulla classica teoria del sillogismo, che non è comunque necessaria per comprendere l'esempio. Chi volesse averne un quadro compatto, rigoroso, ma accessibile, può consultare ad esempio il capitolo II in [1], oppure il capitolo di M. Mugnai in [2].

[7] Anche se non è affatto l'unica possibile, né la più economica.

[8] Ovvero il suo valore è fissato da una tavola finitaria una volta che sono noti i valori di verità degli argomenti.

[9] Si tratta di uno dei protagonisti della logica del Novecento, il logico polacco Alfred Tarski (1902-1983).

[10] Si tratta di un tipo di esempi che è stato portato in auge solo nella seconda metà degli anni Ottanta dal logico francese J.Y. Girard, che ha iniziato una profonda rielaborazione dei principi della logica a partire da motivazioni di vario genere, non ultime quelle provenienti dalla *computer science*.

[11] La spiegazione di che cosa s'intenda per metodo effettivo richiederebbe una specifica discussione; intuitivamente, un metodo siffatto può essere semplicemente identificato con un procedimento che si lascia (almeno in linea di principio) formalizzare in un programma (di un dato linguaggio di programmazione) ed eseguire mediante un calcolatore. Gli algoritmi standard di calcolo che usiamo per fare le quattro operazioni, la procedura per ordinare lessicograficamente un insieme finito di parole della nostra lingua, quella per compilare un orario scolastico, sono tutti esempi di metodi effettivi. L'analisi formale e concettuale della nozione è dovuta all'opera di Alan Turing (1912-1954), ma anche indipendentemente a Post, e ad altri logici e matematici, fra cui lo stesso Gödel.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ballo, E. *et alii*, *Lezioni di Logica*, Muzzio, Padova 1990.

[2] Casari, E,, *Introduzione alla Logica*, Utet, Torino 1997.